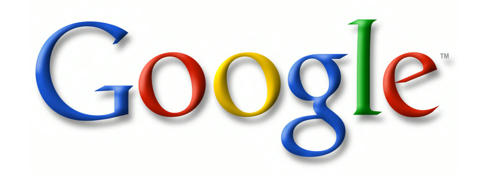
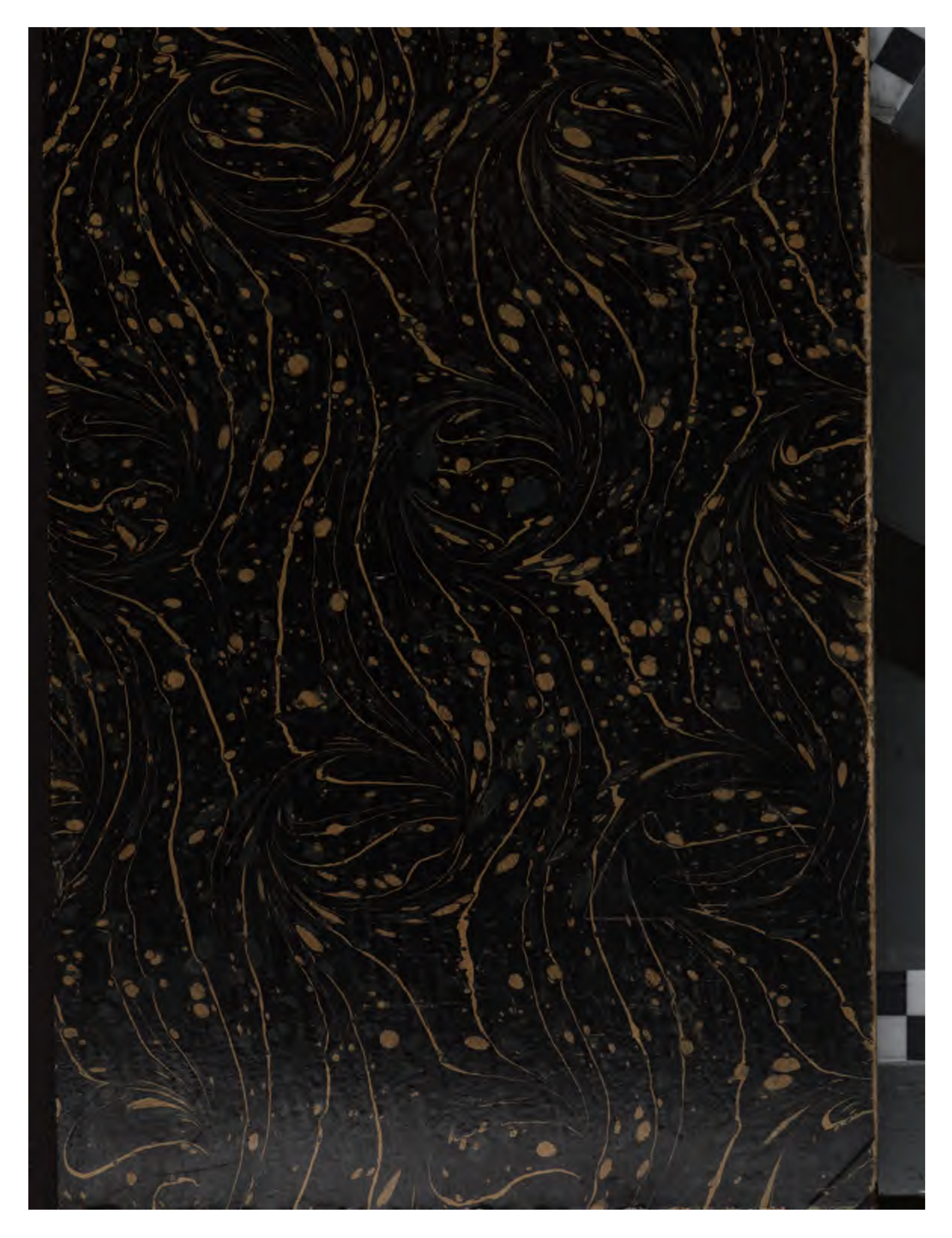

Google



865

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Vier und zwanzigster Band.

In vier Heften.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Berlin, 1842.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des vier und zwanzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft	Seite.
1.	De integratione aequationis differentialis $(A+A'x+A''y)(xdy-ydx)$ $-(B+B'x+B''y)dy+(C+C'x+C''y)dx=0$. Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. ord. Regiom.	I.	1
3.	Demonstratio Nova Theorematis Abeliani. Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. ord. Regiom.	I.	28
8.	De integralibus differentialium algebraicorum. Auctore *C. Ramus*, prof. math. Hafn.	I.	69
19.	Démonstration d'un théorème sur quelques intégrales définies. Par Mr. *C. Ramus* de Copenhague.	III.	257
20.	Démonstration d'un théorème sur les équations différentielles linéaires à deux variables. Par Mr. *C. Ramus* de Copenhague.	III.	260
23.	Recherches sur les formes quadratiques à coëfficients et à indéterminées complexes. Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet* à Berlin. Première Partie.	IV.	291

2. Geometrie.

Nr. der Abhandlung.		Heft	Seite.
4.	Ueber die Construction der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Puncte gegeben sind. Vom Hrn. Dr. *Hesse*, Privatdocenten an der Universität zu Königsberg.	I.	36
5.	Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloïd. Vom Hrn. Dr. *Hesse*, Privatdocenten an der Universität zu Königsberg.	I.	40
7.	Aphorismen aus der Geometrie des Raumes. Vom Herrn Prof. Dr. *Plücker* in Bonn.	I.	60
22.	Fortsetzung derselben.	III.	283
10.	Entwickelung einiger trigonometrischen Formeln durch Hülfe der Lehre von den Doppelschnittsverhältnissen. Vom Hrn. *A. F. Möbius*, Prof. in Leipzig.	I.	85
11.	Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. Par Mr. *J. Steiner*, membre de l'Académie de Berlin. Premier mémoire.	II.	93
16.	Suite. Second mémoire.	III.	189

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
14.	Note über die analytischen Beweise elementar-geometrischer Sätze. Von Herrn Dr. *Reuschle,* Professor am Gymnasio zu Stuttgart.	II.	171
17.	Construction des regulären Siebenzehnecks. Vom Herrn Prof. *v. Staudt* in Erlangen	III.	251
18.	Ueber die Inhalte der Polygone und Polyëder. Vom Herrn Professor *v. Staudt* in Erlangen.	III.	252
21.	Theorie der Centralen. Vom Herrn *H. Graſsmann,* Lehrer der Mathematik zu Stettin.	III.	262
24.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	IV.	372

3. Mechanik.

2.	De motu puncti singularis. Auct. *C. G. J. Jacobi,* prof. math. ord. Regiom.	I.	5
6.	De Aequilibrii formis Ellipsoidicis. Auctore *C. O. Meyer,* muneris Schol. Cand., vet. Semin. Phys.-Math. Regiom. sodali.	I.	44
12.	Sur le mouvement des fluides. Par Mr. *A. F. Svanberg* à Stockholm. (Présenté à l'Academie des sciences de Stockholm 13 Nov. 1839.) . .	II.	153
15.	Ueber das Princip der kleinsten Wirkung. (Principe de la moindre action.) Von Herrn *J. Zech,* theol. cand. zu Tübingen.	II.	177

Verschiedenes.

9.	Sur une question de probabilité relative aux corrections des hauteurs barométriques. Par Mr. *C. Ramus,* prof. à Copenhague.	I.	80
13.	Probabilité des résultats moyens tirés d'observations répetées. Par Mr. *Lobatschewsky,* recteur de l'université de Cazan.	II.	164
	Fac simile einer Handschrift von *Laplace.*	I.	
	- - - - - - - - - *Fuſs.*	II.	
	- - - - - - - - - *Legendre.*	IV.	
	- - - - - - - - - *Huyghens.*	IV.	
	Druckfehler im 17. und 20. Bande.	IV.	383

1.

De integratione aequationis differentialis

$$(A+A'x+A''y)(xdy-ydx)$$
$$-(B+B'x+B''y)dy+(C+C'x+C''y)dx = 0.$$

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. Regiom.)

Si *Euleri* scripta perfectissimis inventis redundant, non minore in pretio habenda sunt quae ipse imperfecta aliorumque curis expolienda reliquit. Quae nobis largam suppeditant materiam in qua vires exercere possimus. Ita nuper sumsi mihi aequationem differentialem,

$$ydx(c+nx)-dy(y+a+bx+nxx) = 0,$$

quam ille in Inst. Calc. Int. Vol. I. pag. 345 tractavit. Sane etiam exercitatus Analyticus non ita facile huius aequationis integrationem deteget. Demonstravit autem *Eulerus*, eam per hanc substitutionem

$$u = \frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nxx},$$

ad separationem variabilium perduci; quippe eam evadere,

$$\frac{du}{u[na+cc-bc+(b-2c)u+uu]} = \frac{dx}{(c+nx)(a+bx+nxx)}$$

Quae adhuc postulantur Quadraturae, methodis quae in promtu sunt absolvuntur, ipsaque inter x et u ideoque etiam inter x et y aequatio finita prodibit.

Aequatio differentialis *Euleriana* cum sic etiam repraesentari possit,

$$nx[xdy-ydx]-(y+a+bx)dy+cy\,dx = 0,$$

proposui mihi generaliorem, in qua tres expressiones, $xdy-ydx$, dy, dx, multiplicantur per ipsarum x et y functiones lineares quascunque

$$(A+A'x+A''y)(xdy-ydx)$$
$$-(B+B'x+B''y)dy+(C+C'x+C''y)dx = 0.$$

Cuius integrationem, methodo ab *Euleriana* toto coelo diversa erutam, sequentibus exponam cum propter formam memorabilem aequationis finitae inter x et y inventae, quae maxime ab aequationis cubicae resolutione pendet, tum propter usum methodi quem forte in aliis occasionibus facere licet.

Ponamus

$$p = \frac{\alpha' + \beta' x + \gamma' y}{\alpha + \beta x + \gamma y}, \quad q = \frac{\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y}{\alpha + \beta x + \gamma y},$$

sitque br. c.

$$\begin{array}{lll} a = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', & a' = \beta''\gamma - \beta\gamma'', & a'' = \beta\gamma' - \beta'\gamma, \\ b = \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', & b' = \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', & b'' = \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, \\ c = \alpha'\beta'' - \alpha''\beta', & c' = \alpha''\beta - \alpha\beta'', & c'' = \alpha\beta' - \alpha'\beta. \end{array}$$

His statutis invenitur differentiando,

$$nn\,dp = +(c'' - a''y)\,dx - (b'' - a''x)\,dy,$$
$$nn\,dq = -(c' - a'y)\,dx + (b' - a'x)\,dy,$$

ubi positum est

$$n = \alpha + \beta x + \gamma y.$$

Aequationes antecedentes si hac forma exhibemus,

$$nn\,dp = +a''(x\,dy - y\,dx) - b''\,dy + c''\,dx,$$
$$nn\,dq = -a'(x\,dy - y\,dx) + b'\,dy - c'\,dx,$$

patet aequationem aliquam differentialem inter p et q,

$$P\,dp + Q\,dq = 0,$$

in hanc transformari:

$$(a''P - a'Q)(x\,dy - y\,dx) - (b''P - b'Q)\,dy + (c''P - c'Q)\,dx = 0.$$

Si aequationem antecedentem, multiplicatam per n, cum aequatione differentiali proposita comparamus, accita quantitate λ eruimus,

$$n(a''P - a'Q) + \lambda \;= A + A'x + A''y,$$
$$n(b''P - b'Q) + \lambda x = B + B'x + B''y,$$
$$n(c''P - c'Q) + \lambda y = C + C'x + C''y.$$

Jam observo, posito

$$\varepsilon = \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'),$$

fieri

$$\begin{array}{l} \alpha a' + \beta b' + \gamma c' \;= 0, \\ \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = 0, \\ \alpha' a' + \beta' b' + \gamma' c' \;= \varepsilon, \\ \alpha' a'' + \beta' b'' + \gamma' c'' = 0, \\ \alpha'' a' + \beta'' b' + \gamma'' c' = 0, \\ \alpha'' a'' + \beta'' b'' + \gamma'' c'' = 0. \end{array}$$

Unde ex aequationibus antecedentibus tres aequationes sequentes eruuntur:

$$1. \quad \lambda(\alpha + \beta x + \gamma y)$$
$$= A\alpha + B\beta + C\gamma + (A'\alpha + B'\beta + C'\gamma)x + (A''\alpha + B''\beta + C''\gamma)y,$$

$$2. \quad -\varepsilon n Q + \lambda(\alpha' + \beta' x + \gamma' y)$$
$$= A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + (A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma')x + (A''\alpha' + B''\beta' + C''\gamma')y,$$
$$3. \quad \varepsilon n P + \lambda(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y)$$
$$= A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' + (A'\alpha'' + B'\beta'' + C'\gamma'')x + (A''\alpha'' + B''\beta'' + C''\gamma'')y.$$

Quae aequationes ut locum habeant statuamus

$$-\varepsilon Q = (\lambda' - \lambda)p, \quad \varepsilon P = (\lambda'' - \lambda)q.$$

Unde aequatio differentialis inter p et q evadit

$$(\lambda'' - \lambda)q\,dp - (\lambda' - \lambda)p\,dq = 0;$$

in aequationibus (1.), (2.), (3.) autem expressiones ad laevam fiunt respective,

$$\lambda(\alpha + \beta x + \gamma y), \quad \lambda'(\alpha' + \beta' x + \gamma' y), \quad \lambda''(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y).$$

Hinc singulos terminos inter se comparatis sequuntur ex aequationibus (1.), (2.), (3.), haec tria aequationum systemata:

$$1. \quad \begin{cases} 0 = (A - \lambda)\alpha + B\beta + C\gamma, \\ 0 = A'\alpha + (B' - \lambda)\beta + C'\gamma, \\ 0 = A''\alpha + B''\beta + (C'' - \lambda)\gamma; \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 0 = (A - \lambda')\alpha' + B\beta' + C\gamma', \\ 0 = A'\alpha' + (B' - \lambda')\beta' + C'\gamma', \\ 0 = A''\alpha' + B''\beta' + (C'' - \lambda')\gamma'; \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 0 = (A - \lambda'')\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'', \\ 0 = A'\alpha'' + (B' - \lambda'')\beta'' + C'\gamma'', \\ 0 = A''\alpha'' + B''\beta'' + (C'' - \lambda'')\gamma''. \end{cases}$$

Ex his aequationibus patet, fieri λ, λ', λ'' tres radices diversas aequationis cubicae

$$(A - z)(B' - z)(C'' - z) - B''C'(A - z) - CA''(B' - z) - A'B(C'' - z)$$
$$+ A'B''C + A''BC' = 0.$$

Huius aequationis resolutione determinatis tribus quantitatibus, λ, λ', λ'', binae e tribus aequationibus cuiuslibet systematis suppeditant rationes quae esse debent inter quantitates α, β, γ, inter quantitates α', β', γ', inter quantitates α'', β'', γ''. E ternis autem quantitatibus una erit arbitraria, quia earum tantum rationes determinantur; unde ex. gr. α, α', α'' ex arbitrio sumere licet. Constantibus α, β etc. dicta ratione definitis, aequatio differentialis proposita in hanc transformata est,

$$(\lambda'' - \lambda)q\,dp - (\lambda' - \lambda)p\,dq = 0,$$

quae integrata suppeditat,

$$p^{\lambda' - \lambda} \cdot q^{\lambda - \lambda''} = \text{Constans},$$

sive etiam

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)^{\lambda'-\lambda''}(\alpha'+\beta' x+\gamma' y)^{\lambda''-\lambda}(\alpha''+\beta'' x+\gamma'' y)^{\lambda-\lambda'} = \text{Constans}.$$

Unde haec eruta est

Propositio.

„Proposita aequatione differentiali

$$(A+A'x+A''y)(x\,dy-y\,dx)$$
$$-(B+B'x+B''y)dy+(C+C'x+C''y) = 0,$$

resolvatur aequatio cubica

$$(A-z)(B'-z)(C''-z)-B''C'(A-z)-CA''(B'-z)-A'B(C''-z)$$
$$+A'B''C+A''BC' = 0;$$

cuius radices tres inter se diversae si appellantur λ, λ', λ'', atque brevitatis causa ponitur

$$B'C''-B''C' = D,\quad C'A''-C''A' = D',\quad A'B''-A''B' = D'',$$
$$B'+C'' = E,$$

erit aequationis differentialis propositae Integrale completum

$$[D-E\lambda+\lambda\lambda+(D'+A'\lambda)x+(D''+A''\lambda)y]^{\lambda'-\lambda''}$$
$$\times[D-E\lambda'+\lambda'\lambda'+(D'+A'\lambda')x+(D''+A''\lambda')y]^{\lambda''-\lambda}$$
$$\times[D-E\lambda''+\lambda''\lambda''+(D'+A'\lambda'')x+(D''+A''\lambda'')y]^{\lambda-\lambda'}$$
$$= \text{Const.}"$$

Regiom. d. 26 Martis 1842.

2.

De motu puncti singularis.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. Regiom.)

Quo majores in genere difficultates parit integratio aequationum differentialium dynamicarum, eo majore cura ea examinare debemus problemata mechanica in quibus integrationem ad Quadraturas perducere contigit. Circumspiciendum enim est an eadem via in aliis quoque aut amplificatis problematis aequationes differentiales ad Quadraturas aut si hoc assequi non licet ad inferiorem certe ordinem revocari possint. Qua de re non ingratum fore confido si plura ejusmodi exempla, quae Quadraturis absolvuntur, hic in conspectum ponam, quae si nova non sunt certe in tractatibus mechanicis aut omnino non aut non ea qua fieri potest generalitate exhibentur. Quae exempla omnia casum tantum simplicissimum, motum puncti singularis spectabunt.

§. 1.

De extensione quadam principii virium vivarum.

Sint x, y, z Coordinatae orthogonales puncti quod in data linea vel superficie curva moveri debet; sint X, Y, Z vires punctum sollicitantes axibus Coordinatarum parallelae, sit s arcus curvae in qua punctum movetur, v puncti velocitas ejusque massa $= 1$. Quoties fit $Xdx + Ydy + Zdz$ differentiale completum, notum est haberi Integrale

$$1. \quad \tfrac{1}{2}vv = \int [Xdx + Ydy + Zdz] + \text{Const.}$$

Quod dicitur principium *conservationis* virium vivarum, quia data puncti positione et velocitate initiali, ad aliam quamcunque positionem determinatam punctum eadem perveniat velocitate, *quaecunque* sit linea vel superficies curva super qua in transitu ab altera ad alteram positionem moveri debet. Quippe in aequatione (1.) nullum ejus lineae aut superficiei vestigium remanet. Quae sane conservatio in machinarum theoria magnas partes agit, sed in aequationibus differentialibus dynamicis integrandis principium illud hanc ob rem in pretio habere solemus quod suppeditat unum aliquod Inte-

grale. Quoties vero solum Integrale inventum curas, non opus est ut expressio, $Xdx + Ydy + Zdz$, *per se* sit differentiale completum, sed eadem valet aequatio (1.) si illa expressio fiat differentiale completum advocatis quae inter Coordinatas x, y, z locum habent aequationibus. Qua de re si punctum in data linea movetur ideoque tres ejus Coordinatae per unam quantitatem exprimi possunt, *semper* erit expressio, $Xdx + Ydy + Zdz$, differentiale completum, dummodo X, Y, Z solarum x, y, z functiones sunt. Si tres Coordinatas per quantitatem aliquam q exprimimus, fit

$$Xdx + Ydy + Zdz = Qdq,$$

$$ds = vdt = \surd(dx\,dx + dy\,dy + dz\,dz) = Vdq,$$

designantibus Q et V solius q functiones. Unde e (1.) relatio inter puncti positionem in data linea ipsumque tempus invenitur formula,

$$2. \quad t + \beta = \int \frac{Vdq}{\surd[2\int Qdq + \alpha]},$$

designantibus α et β Constantes Arbitrarias. Ita prodit pulchra licet elementaris propositio quae in tractatibus mechanicis deficere videtur.

Propositio I.

„Punctum quod in data linea moveri debet, sollicitetur viribus quae solarum puncti Coordinatarum sunt functiones quaecunque, definitur motus puncti solis Quadraturis."

Observo si τ designat vim tangentialem qua punctum sollicitatur, fieri

$$Qdq = Xdx + Ydy + Zdz = \tau ds.$$

Vires autem curvae normales cum omnes destruantur, supponere licet unicam τ agere; unde secundum definitiones mechanicas erit τdt velocitatis v incrementum per tempus dt, sive $\tau dt = dv$. Hinc cum sit $vdt = ds$, sequitur $\tau ds = vdv$, ideoque

$$\tfrac{1}{2}vv = \int \tau ds = \int Qdq.$$

Quae est formulae (1.) demonstratio geometrica. Inventa v eruitur temporis valor ope formulae $t = \int \frac{ds}{v}$.

Casu generaliori quem antecedentibus tractavi velocitas vel vis viva in genere non conservatur, hoc est alia fit pro alia linea in qua fieri debet puncti transitus a positione initiali ad positionem finalem. Sed ad integrationis successum haec conservatio non facit. Ut per formulam (1.) velocitas determinari possit ipsa puncti in data linea positione, non opus est, quod

illa poscit conservatio, ut vires sollicitantes versus puncta fixa dirigantur vel directionem parallelam et intensitatem constantem habeant.

Ponamus jam non ipsum puncti tramitem datum esse, sed tantum superficiem in qua moveri cogatur. Sit $f(x, y, z) = 0$ aequatio superficiei; expressioni $X dx + Y dy + Z dz$ addere licet expressionem evanescentem $\mu\left[\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\right]$, designante μ factorem arbitrarium. Ut autem expressio

$$\left(X + \mu\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(Y + \mu\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(Z + \mu\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz$$

differentiale completum fiat habeantur necesse est tres aequationes conditionales,

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z}.\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial z}.\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

E quibus aequationibus sequitur multiplicando per $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ et addendo,

$$3. \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0.$$

Unde haec fluit Propositio:

Propositio II.

„Punctum quod moveri debet in superficie cujus aequatio, $f(x, y, z) = 0$, secundum directiones axium Coordinatarum viribus sollicitetur X, Y, Z, quae solarum puncti Coordinatarum functiones sint; quoties locum habet aequatio,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0,$$

obtinebitur Integrale,

$$\tfrac{1}{2}vv = \int (X dx + Y dy + Z dz) + \text{Const.},$$

ubi expressio sub signo per solam superficiei aequationem integrabilis fit."

Aequationem conditionalem (3.) non tantum posci sed etiam sufficere ut $X dx + Y dy + Z dz$ per superficiei aequationem differentiale completum existat, sic demonstrari potest.

Adhibeamus aequationum dynamicarum formam ei similem quam ill. *Hamilton* proposuit. Quem ad finem determinetur puncti positio in data

superficie duabus quantitatibus q_1 et q_2 sitque expressis x, y, z per q_1 et q_2,

$$Xdx + Ydy + Zdz = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2.$$

Deinde expressa $\frac{1}{2}vv = T$ per quantitates q_1 et q_2, earumque quotientes differentiales q'_1 et q'_2, fiat,

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial p'_2}.$$

Denique expressa T per quatuor qautitates q_1, q_2, p_1, p_2, atque harum respectu facta ipsius T differentiatione partiali, erunt aequationes differentiales quibus puncti motus determinatur:

$$4. \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2. \end{cases}$$

Ex aequationibus (4.) sequitur

$$\frac{1}{2}d.vv = dT = \frac{\partial T}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial T}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial T}{\partial p_2}dp_2$$
$$= Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2.$$

Cujus aequationis pars dextra ut integrabilis sit, poscitur et sufficit fieri,

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}.$$

Cum sit

$$Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}, \qquad Q_2 = X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_2}$$

aequatio conditionalis antecedens post faciles reductiones in hanc mutatur:

$$5. \quad \begin{cases} o = \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}.\frac{\partial z}{\partial q_2} - \frac{\partial z}{\partial q_1}.\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \\ \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}.\frac{\partial x}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_1}.\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \\ \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}.\frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial y}{\partial q_1}.\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Differentiando aquationem $f = 0$, fit,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial q_1},$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial q_2},$$

unde sequitur

$$\frac{\partial y}{\partial q_1}.\frac{\partial z}{\partial q_2} - \frac{\partial z}{\partial q_1}.\frac{\partial y}{\partial q_2} : \frac{\partial z}{\partial q_1}.\frac{\partial x}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_1}.\frac{\partial z}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_1}.\frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial y}{\partial q_1}.\frac{\partial x}{\partial q_2}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Quibus substitutis in (5.) prodit aequatio conditionalis (3.) supra proposita. Quae igitur si locum habet, fit $\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}$ ideoque $Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2$ integrabile, unde ex aequatione supra tradita,

$$\tfrac{1}{2} d.vv = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2,$$

obtinetur integrando aequatio qua velocitas puncti per quantitates q_1 et q_2 exprimitur,

$$6. \quad T = \tfrac{1}{2} vv = \int (Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2) + \text{Const.}$$

Quae cum Propositione antecedente quadrat.

Ut principium conservationis virium vivarum locum habeat, non advocata superficiei aequatione fieri debet $X dx + Y dy + Z dz$ integrabile, quod requirit aequationes *tres*,

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Sed ad solum inveniendum Integrale (6.) videmus sufficere aequationem *unicam* (3.).

§. 2.

Formulae novae pro motu puncti super data superficie.

Formulae differentiales dynamicae *Hamiltoniarum* similes, quas antecedentibus tradidi, sic demonstrari possunt. Ope aequationis superficiei Coordinatas x, y, z per duas variabiles q_1 et q_2 exprimendo fit,

$$1. \quad \begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2', \\ y' = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y}{\partial q_2} q_2', \\ z' = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z}{\partial q_2} q_2'. \end{cases}$$

Harum formularum ope expressis x', y', z' atque $T = \frac{1}{2}(x'x' + y'y' + z'z')$ per q_1, q_2, q_1', q_2' differentialia illarum quantitatum partialia, ipsarum q_1, q_2, q_1', q_2' respectu sumta, uncis includam, ita ut fiat

$$2. \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x'}{\partial q_1'}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_1}, & \left(\frac{\partial x'}{\partial q_2'}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_2}, \\ \left(\frac{\partial y'}{\partial q_1'}\right) = \frac{\partial y}{\partial q_1}, & \left(\frac{\partial y'}{\partial q_2'}\right) = \frac{\partial y}{\partial q_2}, \\ \left(\frac{\partial z'}{\partial q_1'}\right) = \frac{\partial y}{\partial q_1}, & \left(\frac{\partial z'}{\partial q_2'}\right) = \frac{\partial z}{\partial q_2}. \end{cases}$$

Unde

$$3.\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) = p_1 = x'\frac{\partial x}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z}{\partial q_1}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) = p_2 = x'\frac{\partial x}{\partial q_2} + y'\frac{\partial y}{\partial q_2} + z'\frac{\partial z}{\partial q_2}. \end{cases}$$

Fit porro e (1.)

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q_1' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q_2' = \frac{d.\frac{\partial x}{\partial q_1}}{dt},$$

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q_1' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_2} q_2' = \frac{d.\frac{\partial x}{\partial q_2}}{dt},$$

unde similibus formulis $a\partial y$ et z valentibus erit,

$$4.\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) = x'\frac{d.\frac{\partial x}{\partial q_1}}{dt} + y'\frac{d.\frac{\partial y}{\partial q_1}}{dt} + z'\frac{d.\frac{\partial z}{\partial q_1}}{dt}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = x'\frac{d.\frac{\partial x}{\partial q_2}}{dt} + y'\frac{d.\frac{\partial y}{\partial q_2}}{dt} + z'\frac{d.\frac{\partial z}{\partial q_2}}{dt} \end{cases}$$

sive e (3.):

$$5.\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) = \frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial x}{\partial q_1}.\frac{dx'}{dt} - \frac{\partial y}{\partial q_1}.\frac{dy'}{dt} - \frac{\partial z}{\partial q_1}.\frac{dz}{dt}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = \frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial x}{\partial q_2}.\frac{dx'}{dt} - \frac{\partial y}{\partial q_2}.\frac{dy'}{dt} - \frac{\partial z}{\partial q_2}.\frac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Fit T ipsarum q_1' et q_2' respectu functio homogenea secundi ordinis, unde secundum propositionem notam

$$q_1'\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) + q_2'\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) = p_1 q_1' + p_2 q_2' = 2T,$$

ideoque $T = p_1 q_1' + p_2 q_2' - T$. Qua formula variata et rejectis terminis se mutuo destruentibus obtinetur,

$$\partial T = q_1' \partial p_1 + q_1' \partial p_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)\partial q_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)\partial q_2.$$

Expressa igitur T per quatuor quantitates q_1, q_2, p_1, p_2, si in denotandis differentialibus partialibus, ipsarum q_1, q_2, p_1, p_2 respectu sumtis, uncos rejicimus, fit

$$6.\quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial p_1} = q_1' = \frac{dq_1}{dt}, \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = q_2' = \frac{dq_2}{dt}, \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right). \end{cases}$$

Ex his formulis advocando (5.) sequitur,

$$7.\quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_1}\cdot\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\cdot\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\cdot\frac{dz'}{dt}, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\cdot\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\cdot\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\cdot\frac{dz'}{dt}. \end{cases}$$

Aequationes differentiales quae traduntur pro motu puncti super data superficie cujus aequatio $f = 0$, sunt sequentes:

$$8.\quad \frac{dx'}{dt} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{dy'}{dt} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{dz'}{dt} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

designantibus X, Y, Z vires punctum sollicitantes, axibus Coordinatarum x, y, z parallelas. Substituendo ipsarum x, y, z expressiones per q_1 et q_2 exhibitas, cum identice evanescere debeat f, erit differentiando ipsarum q_1 et q_2 respectu,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_2} = 0;$$

unde, si brevitatis causa ponitur,

$$X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial x}{\partial q_1} = Q_1,$$
$$X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_2} = Q_2,$$

ex aequationibus (8.) sequitur,

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\cdot\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\cdot\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\cdot\frac{dz'}{dt} = Q_1,$$
$$\frac{\partial x}{\partial q_2}\cdot\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\cdot\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\cdot\frac{dz'}{dt} = Q_2.$$

Quibus formulis in aequationibus (7.) substitutis provenit,

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1,$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2.$$

Quae sunt novae formulae supra traditae.

§. 3.

Determinatio orbitae puncti super data superficie moti si revocata est ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles, ejus integratio solis perficitur Quadraturis.

Motus puncti in data superficie, si quidem virium sollicitantium expressiones non ipsum tempus explicite involvunt, secundum antecedentia

pendet ab integratione trium aequationum differentialium primi ordinis inter quatuor quantitates, q_1, q_2, p_1, p_2,

$$1. \quad dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = \frac{\partial T}{\partial p_1} : \frac{\partial T}{\partial p_2} : -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 : -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2.$$

Qua integratione transacta una Quadratura dabit relationem inter positionem puncti et tempus. Etenim illa integratione facta exprimi possunt q_2, p_1, p_2 ideoque etiam quantitas $\frac{\partial T}{\partial p_1}$ per q_1; qua substituta expressione fit

$$t = \int \frac{dq_1}{\frac{\partial T}{\partial p_1}}.$$

At quoties vires punctum secundum Coordinatarum directiones sollicitantes, X, Y, Z, solarum Coordinatarum functiones sunt, quo casu etiam Q_1 et Q_2 solarum q_1 et q_2 functiones erunt, non tantum temporis expressio sola Quadratura invenitur, sed etiam e tribus Integralibus aequationum (1.) ultimum secundum regulam generalem semper per solas Quadraturas constabit. In alia enim Commentatione demonstro Propositionem generalem sequentem, quae pro novo principio mechanico haberi potest:

„Proponatur motus systematis punctorum materialium quibuscunque conditionibus subjecti, sintque vires, puncta secundum directiones Coordinatarum sollicitantes solarum Coordinatarum functiones: si determinatio orbitarum punctorum materialium revocata est ad integrationem unius aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles, ejus aequationis secundum regulam generalem inveniri potest Multiplicator, qui eam per solas Quadraturas reddat integrabilem."

Hoc loco Propositionem generalem motui puncti singularis data superficie applicabo et regulam indagandi Multiplicatorem pro casu illo simplici seorsum demonstrabo. Qua demonstratione simul elucebit usus formularum differentialium dynamicarum antecedentibus exhibitarum.

Propositio.

„Propositis aequationibus tribus differentialibus primi ordinis inter quatuor quantitates q_1, q_2, p_1, p_2,

$$dq_1 \cdot dq_2 : dp_1 : dp_2 = \frac{\partial T}{\partial p_1} : \frac{\partial T}{\partial p_2} : -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 : -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2,$$

in quibus Q_1 et Q_2 sint solarum q_1 et q_2 functiones, inventa sint duo Integralia duabus Constantibus Arbitrariis α et β affecta eorumque ope ex-

hibeantur p_1, p_2, $\frac{\partial T}{\partial p_1}$, $\frac{\partial T}{\partial p_2}$ per quantitates q_1, q_2 atque Constantes Arbitrarias α et β; quo facto integranda restat aequatio differentialis primi ordinis inter duas quantitates q_1 et q_2,

$$\frac{\partial T}{\partial p_2} dq_1 - \frac{\partial T}{\partial p_1} dq_2 = 0,$$

qua orbita puncti super data superficie determinatur; cujus aequationis partem laevam dico multiplicatam per factorem,

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \beta} - \frac{\partial p_1}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha},$$

differentiale completum sive solis Quadraturis integrabilem evadere."

Demonstratio.

Functionum, quae duplice modo, et per q_1, q_2, α, β et per q_1, q_2, p_1, p_2 exhibentur, differentialia partialia, harum respectu quantitatum sumta sine uncis denotabo, illarum respectu sumta uncis includam. His positis si br. c. vocatur n factor,

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \beta} - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \beta} = n,$$

propositum demonstratum est, ubi probata erit aequatio,

$$\left(\frac{\partial . n \frac{\partial T}{\partial p_1}}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial . n \frac{\partial T}{\partial p_2}}{\partial q_2}\right) = 0.$$

Fit

$$dp_1 = \frac{\partial p_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} dq_2, \qquad dp_2 = \frac{\partial p_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial q_2} dq_2.$$

Unde ipsarum p_1 et p_2 expressiones, per q_1, q_2 et Constantes Arbitrarias α et β exhibitas, in aequationibus differentialibus propositis substituendo fit:

$$1. \quad \begin{cases} -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 = \frac{\partial p_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_1} + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_2}, \\ -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q = \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial p_2}. \end{cases}$$

Erit autem secundum notationis modum usurpatum,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial T}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial T}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_1},$$
$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial T}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_2} + \frac{\partial T}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_2}.$$

Hinc invenitur e (1.):

$$2.\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) = Q_1 - \left[\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right]\frac{\partial T}{\partial p_2}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = Q_2 + \left[\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right]\frac{\partial T}{\partial p_1}. \end{cases}$$

Porro fit,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial T}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial \alpha},$$

unde,

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial T}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial T}{\partial p_2} - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}Q_1.$$

Prorsus eadem methodo vel etiam sola indicum 1 et 2 permutatione obtinetur,

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial T}{\partial p_2} + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial T}{\partial p_1} - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}Q_2.$$

Alteram formulam de altero detrahendo obtinemus,

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}Q_2 - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}Q_1.$$

Eadem methodo invenitur,

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \beta}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial \beta}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial \beta}Q_2 - \frac{\partial p_2}{\partial \beta}Q_1.$$

Supponimus vires sollicitantes X, Y, Z esse solarum x, y, z functiones, unde quantitates Q_1 et Q_2 solis q_1 et q_2 afficiuntur ideoque cum ab ipsis p_1 et p_2 tum a Constantibus Arbitrariis α et β vacuae sunt. Hinc duarum aequationum antecedentium differentiando priorem ipsius β respectu, posteriorem ipsius α respectu et detrahendo prorsus evanescit pars dextra in Q_1 et Q_2 multiplicata. Pars laeva autem evadit reiectis terminis se mutuo destruentibus,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 p_2}{\partial \beta\, d q_1}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \beta\, d q_1}\right) - \frac{\partial^2 p_1}{\partial \beta\, \partial q_2}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \beta\, \partial q_2}\right) \\ -&\frac{\partial^2 p_2}{\partial \alpha\, \partial q_1}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial p_2}{\partial \beta}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha\, \partial q_1}\right) - \frac{\partial^2 p_1}{\partial \alpha\, \partial q_2}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial \beta}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha\, \partial q_2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quam aequationem sic repraesentare licet,

$$2.\quad \left(\frac{\partial\left[\frac{\partial p_2}{\partial \beta}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right)\right]}{\partial q_1}\right) - \left(\frac{d\left[\frac{\partial p_1}{\partial \beta}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right)\right]}{\partial q_2}\right) = 0,$$

At ex aequationibus

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial T}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial \alpha}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial T}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial T}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial \beta},$$

sequitur substituendo ipsius n valorem supra positum,

$$\frac{\partial p_2}{\partial \beta}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) = n\frac{\partial T}{\partial p_1}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \beta}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) = -n\frac{\partial T}{\partial p_2}.$$

Quibus substitutis aequatio (2.) hanc induit formam,

$$\left(\frac{\partial . n\frac{\partial T}{\partial p_1}}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial . n\frac{\partial T}{\partial p_2}}{\partial p_2}\right) = 0,$$

quae est formulae demonstratio proposita.

Antecedentibus iustam quidem esse. Propositionem traditam rite demonstratur neque vero aperitur fons genuinus e quo ipsa Propositio hausta est. Quippe quae emanat e nova theoria Multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium simultanearum applicandi, quam in alia Commentatione expono.

§. 4.

Motus puncti in superficie revolutione genita, valente principio conservationis areae, revocatur ad alium qui super curva meridiana fieri debet ideoque definitur solis Quadraturis.

Motum puncti in superficie data, si duo innotescant Integralia aequationum differentialium dynamicarum, vidimus solis Quadraturis definiri. Quoties autem valet principium mechanicum quod principium conservationis areae dicitur, usu venit ut jam per unum Integrale ab isto principio suppeditatum problema ad solas Quadraturas revocetur. Fit enim ut motus propositus revocari possit ad alium super curva meridiana, unde cum motus super data curva Quadraturis absolvatur, sicuti §. 1. vidimus, etiam motus propositus Quadraturis definiri poterit. Ut autem valeat principium conservationis areae, superficies super qua punctum movetur esse debet revolutione genita, porro vis sollicitans in ipso plano meridiani dirigatur necesse est et a sola puncti positione in meridiano pendeat neque ullo modo ab angulo quem format planum meridiani cum plano fixo per axem ducto. Vim autem sollicitantem neque a tempore neque a velocitate pendere, in hac Commentatione nisi contrarium diserte asseritur vel tacite intelligo. Si igitur x est recta axi parallela e puncto moto demissa ad planum fixum axi perpendiculare, y recta

e puncto moto ad axem perpendiculariter ducta, disponere licebit vim sollicitantem in duas alias ipsis x et y parallelas quarum simul intensitates solarum x et y esse debent functiones. Jam ipsum computum adstruam.

Sint x, υ, ζ Coordinatae puncti orthogonales, sitque axis Coordinatarum x idem atque axis superficiei revolutione genitae. Discerpatur vis sollicitans in duas, alteram axi parallelam X, alteram axi normalem Y; sit porro, $\sqrt{(\upsilon\upsilon+\zeta\zeta)}=y$, atque, $f(x,y)=f(x,\sqrt{(\upsilon\upsilon+\zeta\zeta)})=0$, aequatio Meridiani. Cum vim sollicitantem supponamus in ipso plano Meridiani directam esse, ipsa Y disponi potest in duas vires Coordinatis υ et ζ parallelas, $\frac{Y\upsilon}{y}$, $\frac{Y\zeta}{y}$. Quibus positis, secundum praecepta nota accito factore λ habentur aequationes differentiales dynamicae, quae integrandae sunt, sequentes:

$$2.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = X+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{d^2\upsilon}{dt^2} = \dfrac{Y\upsilon}{y}+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial \upsilon} = \left(Y+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\dfrac{\upsilon}{y}, \\[2mm] \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \dfrac{Y\zeta}{y}+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial \zeta} = \left(Y+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\dfrac{\zeta}{y}. \end{cases}$$

Ex aequationibus (2.) sequitur $\upsilon\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\upsilon}{dt^2}=0$, unde fit integrando,

$$3.\quad \upsilon\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\upsilon}{dt}=\alpha,$$

designante α Constantem Arbitrariam. Quod est Integrale suppeditatum principio conservationis areae, ad planum Coordinatarum υ et ζ relato.

Advocemus iam aequationem identicam,

$$\frac{d^2\sqrt{(\upsilon\upsilon+\zeta\zeta)}}{dt^2} = \frac{\upsilon d^2\upsilon+\zeta d^2\zeta}{\sqrt{(\upsilon\upsilon+\zeta\zeta)}} + \frac{\left(\upsilon\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2}{\sqrt{(\upsilon\upsilon+\zeta\zeta)^3}}.$$

E qua aequatione substituendo (2.) et (3.) eruitur

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\alpha\alpha}{y^3}.$$

Cum supponamus vim sollicitantem pendere a sola positione puncti in Meridiano neque ab angulo quem format planum Meridiani cum plano fixo per axem superficiei ducto, erunt X et Y solarum x et y functiones. Unde aequationes (2.) redeunt in has inter quantitates x et y, inter quas praeterea locum habet aequatio $f(x,y)=0$,

$$4.\quad \frac{d^2x}{dt^2} = X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y+\lambda\frac{\alpha\alpha}{y^3}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Hae autem aequationes ipsae sunt aequationes differentiales dynamicae pro motu puncti in curva cujus aequatio est $f(x,y)=0$, si quidem vires sollicitantes, Coordinatis x et y parallelae, sunt X et $Y+\frac{\alpha\alpha}{y^3}$. Unde Propositio haec habetur:

Propositio I.

„Punctum, quod in data superficie revolutione genita moveri debet, vi sollicitetur in plano Meridiani directa et a sola positione puncti in ipso Meridiano pendente: revocari potest motus propositus ad motum puncti in curva meridiana, accedente ad vim sollicitantem alia quae axi perpendicularis et cubo distantiae puncti ab axe inverse proportionalis est."

Sequitur e (4.)

$$\frac{dx}{dt}d.\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}d.\frac{dy}{dt} = Xdx+\left(Y+\frac{\alpha\alpha}{yy}\right)dy,$$

unde si aequationis Meridiani ope exprimimus x, X, Y per unicam y atque designamus per w velocitatem puncti in Meridiano, integrando habetur:

$$\tfrac{1}{2}ww = \int\left[X\frac{dx}{dy}+Y\right]dy-\frac{\alpha\alpha}{2yy}.$$

unde designante σ elementum curvae meridianae,

$$5.\quad t=\int\frac{d\sigma}{w}=\int\frac{\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}dy}{\left\{2\int\left[X\frac{dx}{dy}+Y\right]dy-\frac{\alpha\alpha}{yy}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Ponendo $v=y\cos\psi$, $\zeta=y\sin\psi$, fit $v.d\zeta-\zeta dv=yy\,d\psi$, unde e (3.) sequitur

$$d\psi=\frac{\alpha\,dt}{yy}=\frac{\alpha\,d\sigma}{yyw},$$

quod suppeditat anguli ψ expressionem,

$$\psi=\alpha\int\frac{\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}dy}{yy\left[2\int\left(X\frac{dx}{dy}+Y\right)dy-\frac{\alpha\alpha}{yy}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Motum propositum componi videmus e motu puncti in Meridiano et motu rotatorio plani Meridiani circa axem superficiei. Data aequatione Meridiani per unam y (distantiam puncti ab axe) determinatur Coordinata x ideoque positio puncti in Meridiano; deinde solis Quadraturis obtinetur et angulus ψ quem planum Meridiani format cum plano fixo, per axem superficiei ducto,

et tempus t. Si velocitas initialis in plano Meridiani dirigitur, fit $d = 0$, $\psi = 0$. ideoque nullus plane datur plani Meridiani motus rotatorius sive quod idem est, punctum in eodem semper Meridiano movetur.

Formulis antecedentibus etiam uti licet si superficies proprio motu uniformi circa axem rotatur. Quippe vi sollicitanti accedit eo casu vis centrifuga axi normalis, unde ipsi Y addenda est quantitas $c.y$, designante c Constantem, ideoque in ipsorum t et ψ expressionibus quantitati sub radicali quadratico addendus est terminus $\frac{1}{2}cyy$.

Si solidum, in cujus superficie punctum movetur, massa constat homogenea, vi attractiva seu *Neutoniana* seu alia quacunque praedita, vis qua punctum sollicitatur aperte in plano meridiano dirigitur, ejusque et directio in plano illo et intensitas a sola puncti positione in curva meridiana pendet. Idem evenit si solidum non est homogeneum sed ejusdem plani Meridiani puncta diversa gaudent densitate quacunque, omnia autem plana Meridiana eadem ratione constituta sunt, ita ut designante y distantiam elementi massae ab axe, x distantiam ejus a plano fixo ad axem perpendiculari, densitas elementi solarum x et y functio sit. Qua de re hi casus ad motum antecedentibus consideratum pertinent sive haec habetur Propositio:

Propositio II.

„Si punctum moveri debet in superficie solidi revolutione geniti, cujus massa vi quadam attractiva praedita et in planis meridianis omnibus secundum eandem densitatis legem distributa est, determinatur motus puncti solis Quadraturis, idque sive solidum ipsum quiescat sive motu uniformi circa axem rotetur."

Adstruam ipsas formulas pro casu, quo Meridianus est ellipsis, massa homogenea atque lex attractionis *Neutoniana.*

Motus puncti in superficie solidi sphaeroidici elliptici homogenei vi attractiva Neutoniana praediti.

Sit aequatio Meridiani,

$$\frac{xx}{bb} + \frac{yy}{aa} = 1,$$

constat fieri

$$X = f.x, \qquad Y = g.y,$$

designantibus f et g quantitates constantes determinatas per attractiones bf, ag, quae in polo et in aequatore locum habent. Hinc eruitur

$$\int [X dx + Y dy] = \tfrac{1}{2}[fxx + gyy] + \text{Const.} = \tfrac{1}{2}hyy + \beta,$$

posito $h = \frac{aag - bbf}{aa}$ et designante β Constantem Arbitrariam. Porro ponendo

$$\frac{aa - bb}{aa} = ee,$$

fit elementum ellipsis,

$$\sqrt{(dx\,dx + dy\,dy)} = \frac{\sqrt{(aa - eeyy)}}{\sqrt{(aa - yy)}} dy.$$

Unde e formulis (5.) et (6.) obtinemus, designantibus τ et γ novas Constantes Arbitrarias,

$$t + \tau = \int \frac{\sqrt{(aa - eeyy)}\, dy}{\sqrt{\left[hyy + 2\beta - \frac{aa}{yy}\right]} \sqrt{(aa - yy)}},$$

$$\psi + \gamma = a \int \frac{\sqrt{(aa - eeyy)}\, dy}{yy \sqrt{(aa - yy)} \sqrt{\left(hyy + 2\beta - \frac{aa}{yy}\right)}},$$

sive posito $yy = u$,

$$t + \tau = \tfrac{1}{2} \int \frac{\sqrt{(aa - eeu)}\, du}{\sqrt{[(aa - u)(hu^2 + 2\beta u - aa)]}},$$

$$\psi + \gamma = \tfrac{1}{2} a \int \frac{\sqrt{(aa - eeu)}\, du}{u \sqrt{[(aa - u)(hu^2 + 2\beta u - aa)]}},$$

quae sunt integralia elliptica. Si solidum ipsum motu gyratorio uniformi circa ipsius axem gaudet, formulae antecedentibus aliam non subeunt mutationem nisi quod data quantitas constans h alium valorem induat.

Exemplum aliud habetur, si sola in punctum agit gravitas simulque axis superficiei est verticalis. Eo casu ex antecedentibus haec fluit Propositio.

Propositio III.

„Si grave moveri debet in superficie revolutione circa axem verticalem genita determinatur motus solis Quadraturis."

Pro eo motu fit $Y = 0$, $X = g$, designante g gravitatem, unde e formulis (5.) et (6.) designantibus β, γ, τ Constantes Arbitrarias, obtinetur,

7. $$t + \tau = \int \frac{d\sigma}{\sqrt{\left(2gx + \beta - \frac{aa}{yy}\right)}}, \qquad \psi + \gamma = a \int \frac{d\sigma}{yy \sqrt{\left(2gx + \beta - \frac{aa}{yy}\right)}},$$

quibus in formulis si ope aequationis curvae Meridiani y per x expressa datur, substituendum est $ds = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} dx$.

De penduli simplicis oscillationibus conicis.

Ad motum antecedentem pertinet simplicis penduli oscillatio in sphaera sive improprie conica dicta.

Sit enim l longitudo penduli, ψ angulus quem planum verticale per pendulum ductum cum plano verticali fixo format, erit:

$$y = \sqrt{(ll-xx)}, \quad d\sigma = \frac{-l\,dx}{\sqrt{(ll-xx)}},$$

unde evadunt formulae (7.),

$$8. \quad \begin{cases} t+\tau = -l\int \dfrac{dx}{\sqrt{[(2gx+\beta)(ll-x)-\alpha\alpha]}}, \\ \psi+\gamma = -\alpha l\int \dfrac{dx}{(ll-xx)\sqrt{[(2gx+\beta)(ll-xx)-\alpha\alpha]}}. \end{cases}$$

Quod cum formulis notis convenit. Videas autem quanta gaudeant generalitate formulae propositae (5.) et (6.), e quibus antecedentes (8.) deductae sunt, cum per illas formulas et t et ψ solis Quadraturis obtineantur etiamsi sphaerae substituis superficiem quamcunque revolutione genitam, gravitati autem vim in plano meridiani directam quae *quocunque modo* a Coordinatis x et y pendet.

§. 5.

De motu puncti versus centrum fixum generaliori quadam quam Neutoniana lege attracti.

Constat motum puncti versus centrum fixum attracti revocari posse ad Quadraturas, si attractio est functio quaecunque distantiae. Quod mirum non est quia eo casu adhuc utrumque valet principium conservationis arearum et virium vivarum. Animadverti nuper aliam attractionis legem et ipsam generaliorem quam Neutonianam, pro qua semper valente principio arearum, quoniam attractio versus centrum fixum dirigitur, alterum principium virium vivarum non locum habet, et nihilo tamen minus motus solis Quadraturis definitur. Qua de re etiam fieri debet, ut aequationes differentiales pro motu planetae circa solem propositae integrari queant absque adjumento principii virium vivarum. Quae integratio cum propter egregiam simplicitatem atque defectum omnis radicis quadraticae adnotatu digna videatur, paucis eam exponam antequam ad generaliorem motum accedam.

Aequationes differentiales pro motu planetae circa solem propositae nova methodo integrantur.

Proponantur aequationes differentiales quae pro motu planetae circa solem habentur,

$$1.\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{dt} = -\frac{k^2x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y^2}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = -\frac{k^2y}{r^3},$$

in quibus est k^2 intensitas attractionis pro unitate distantiae, atque $\sqrt{(xx+yy)}$ distantia planetae a sole. E (1.) fit:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt} = 0,$$

unde integrando fit,

$$2.\quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = rr\frac{d\varphi}{dt} = \alpha,$$

ubi $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, et α Constans Arbitraria. Dividendo aequationes (1.) per (2.) sequitur,

$$\frac{dx'}{d\varphi} = -\frac{k^2}{\alpha}\cos\varphi, \qquad \frac{dy'}{d\varphi} = -\frac{k^2}{\alpha}\sin\varphi,$$

unde integrando obtinetur, designantibus β et γ Constantes Arbitrarias,

$$3.\quad x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{k^2}{\alpha}\sin\varphi + \beta, \qquad y' = \frac{dy}{dt} = \frac{k^2}{\alpha}\cos\varphi + \gamma,$$

sive dividendo rursus per (2.):

$$4.\quad dx = \frac{rr}{\alpha}\left[-\frac{k^2}{\alpha}\sin\varphi + \beta\right]d\varphi, \qquad dy = \frac{rr}{\alpha}\left[\frac{k^2}{\alpha}\cos\varphi + \gamma\right]d\varphi.$$

Ex his formulis deducitur,

$$x\,dy - y\,dx = rr\,d\varphi = \frac{r^2}{\alpha}\left[\frac{k^2}{\alpha} + \gamma\cos\varphi - \beta\sin\varphi\right]d\varphi,$$

unde

$$5.\quad r = \frac{\alpha\alpha}{k^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha\gamma}{k^2}\cos\varphi - \frac{\alpha\beta}{k^2}\sin\varphi},$$

quae est sectionis conicae aequatio relata ad Coordinatas polares quarum initium in foco. Expressa r per φ, e (2.) invenitur tempus per formulam nobis methodis integrabilem,

$$6.\quad t + \tau = \frac{1}{\alpha}\int rr\,d\varphi,$$

ubi τ nova Constans Arbitraria.

Motus puncti versus centrum fixum attracti si intensitas attractionis exprimitur Coordinatarum functione quacunque homogenea $(-2)^{ti}$ ordinis.

Si methodum autecedentibus usurpatam acurate examinamus, videmus ejus successum eo tantum pendere quod vis attractiva sit functio Coordinatarum homogenea $(-2)^{ti}$ ordinis. Quod locum habet si intensitas vis attractivae quadrato distantiae inverse proportionalis est, sicuti Neutoniana, insuper autem ab angulis pendet quos radius vector format cum rectis quibuscunque in spatio fixis. Et hic motus fieri debet in plano per centrum fixum et directionem velocitatis initialis ducto, unde rursus ponamus licet, tertia Coordinata evanescente, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; ipsa attractio autem formula exhibetur,

$$\frac{\Phi}{rr},$$

designante Φ solius φ functionem, quae pro casu naturae constans fit. Aequationes differentiales integrandae fiunt,

$$1.\quad \frac{dx'}{dt} = -\Phi.\frac{x}{r^3},\qquad \frac{dy'}{dt} = -\Phi.\frac{y}{r^3}.$$

Per principium areae habetur,

$$2.\quad rr\,d\varphi = \alpha\,dt,$$

designante α Constantem Arbitrariam; unde dividendo (1.) per (2.) obtinetur:

$$\alpha\,dx' = -\Phi\cos\varphi\,d\varphi,\qquad \alpha\,dy' = -\Phi\sin\varphi\,d\varphi.$$

Hinc integrando et designando per β et γ novas Constantes Arbitrarias sequitur,

$$\alpha x' = -\int\Phi\cos\varphi\,d\varphi+\beta,\qquad \alpha y' = -\int\Phi\sin\varphi\,d\varphi+\gamma,$$

vel e (2.):

$$\alpha^2 dx = -rr\,d\varphi\left[\int\Phi\cos\varphi\,d\varphi+\beta\right],$$
$$\alpha^2 dy = -rr\,d\varphi\left[\int\Phi\sin\varphi\,d\varphi+\gamma\right].$$

Hinc, cum sit $x\,dy-y\,dx = rr\,d\varphi$, sequitur aequatio orbitae ad Coordinatas polares relatae,

$$r = \frac{\alpha^2}{\sin\varphi\int\Phi\cos\varphi\,d\varphi-\cos\varphi\int\Phi\sin\varphi\,d\varphi+\beta\sin\varphi-\gamma\cos\varphi}.$$

Hac formula si exprimitur r per φ, habetur tempus formula,

$$t+\tau = \frac{1}{\alpha}\int rr\,d\varphi,$$

designante τ Constantem Arbitrariam.

§. 6.

De motu puncti super data curva et in medio resistente.

Supra demonstratum est motum puncti super data curva semper Quadraturis determinari, siquidem vires punctum sollicitantes neque a tempore neque a velocitate puncti directe pendeant sed solarum Coordinatarum functiones sint. Quae Propositio ita amplificare potest *ut motus puncti super data curva definiatur Quadraturis etiam si viribus sollicitantibus, quae Coordinatarum puncti functiones quaecunque sunt, addatur vis resistentiae medii, functioni lineari quadrati velocitatis aequalis, vel etiam expressa formula exponentiali,* $a+be^{cvv}$, *idque sive medium uniforme sit sive eius densitas quacunque lege variatur.*

Sit enim $\frac{1}{2}a(vv+b)$ resistentia medii, designantibus a et b Constantes, atque sit τ vis tangentialis a reliquis viribus sollicitantibus oriunda. Cum vires datae curvae normales omnes destruantur nec nisi vires tangentiales remaneant, erit

$$dv = [-\tfrac{1}{2}a(vv+b)+\tau]\,dt,$$

sive,

$$1. \quad 2v\,dv + avv\,ds = (2\tau - ab)\,ds.$$

Unde multiplicando per e^{as} et integrando obtinetur,

$$2. \quad e^{as}.vv = 2\int e^{as}\tau\,ds - be^{as} + \alpha,$$

designante α Constantem Arbitrariam. Cum data sit curva super qua punctum movetur atque vis sollicitans solarum puncti Coordinatarum functio sit, exprimi poterit vis tangentialis τ per Arcum s, quo facto formula antecedens tantum Quadraturam poscit. Altera Quadratura ex aequatione, $dt = \frac{ds}{v}$, obtinetur relatio inter tempus et arcum,

$$3. \quad t+\tau = \int \frac{ds}{\sqrt{\left[2e^{-as}.\int e^{as}\tau\,ds + \alpha e^{-as} - b\right]}},$$

designante τ Constantem Arbitrariam.

Reductio ad Quadraturas succedit etiam si in formula legem resistentiae exprimente quantitates a et b non sunt Constantes sed quaecunque Coordinatarum functiones, quemadmodum inter alia fit, si medii densitas variabilis est. Aequatio (1.) enim per notas methodos integratur, designantibus a, b, τ quascunque ipsius s functiones.

Sit jam resistentia medio data per formulam,

$$a + b e^{cvv};$$

erit

$$dv = [-a - b e^{cvv} + \tau] dt,$$

ideoque,

$$v dv = [-a - b e^{cvv} + \tau] ds,$$

sive

$$e^{-cvv} [v dv + (a - \tau) ds] + b ds = 0.$$

Ponatur

$$e^{-cvv} = w,$$

sequitur ex aequatione antecedente,

$$dw + 2c(\tau - a) w ds = 2cb ds.$$

Unde posito

$$4. \quad 2c \int (\tau - a) ds = S,$$

sequitur

$$e^S w = 2c \int b e^S ds,$$

ideoque

$$5. \quad w = e^{-cvv} = 2c e^{-S} \int b e^S ds.$$

Hac formula si determinatur v, invenitur t per formulam,

$$t = \int \frac{ds}{v}.$$

Cum data sit curva super qua punctum moveri debet, invenitur S per unicam Quadraturam. In formulis antecedentibus ipsa quidem c esse debet Constans, sed quantitates a et b sive Constantes esse possunt sive Coordinatarum puncti functiones quaecunque. Unde formulae praecedentes etiam ad motum in medio non uniformi valent.

Motus penduli in medio resistente si quidem vis resistentiae proportionalis est quadrato velocitatis plus constanti.

Ut habeatur exemplum, consideremus motum penduli in medio resistente. Curva super qua punctum moveri debet erit circulus verticalis, vis sollicitans gravitas; ponamus porro medii resistentiam $\frac{1}{2} a (vv + b)$, designantibus a et b Constantes. Sit l longitudo penduli, φ angulus penduli cum verticali, g gravitas, erit

$$ds = l d\varphi, \qquad \tau = -g \sin \varphi = \tfrac{1}{2} g \sqrt{-1} \, [e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}].$$

Hinc fit,

$$\int e^{as} \tau ds = \tfrac{1}{2} g l \sqrt{-1} \int [e^{(al + \sqrt{-1})\varphi} - e^{(al - \sqrt{-1})\varphi}] d\varphi,$$

unde

$$e^{-as}\int e^{as}\tau\, ds = \tfrac{1}{2} g l \sqrt{-1}\left[\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}}{al+\sqrt{-1}} - \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}}{al-\sqrt{-1}}\right]$$

$$= \frac{gl}{a^2 l^2+1}[\cos\varphi - al\sin\varphi].$$

Quibus in formula (3.) substitutis obtinetur,

$$6.\qquad t+\tau = \int \frac{l\,d\varphi}{\sqrt{\left[\frac{2gl}{a^2l^2+1}(\cos\varphi - al\sin\varphi) + \alpha e^{-al\varphi} - b\right]}},$$

ubi α et τ sunt Constantes Arbitrariae. Quae nota est formula.

Si punctum liberum nulla vi sollicitatur praeter tangentialem, qualis est vis resistentiae medii, motus secundum lineam rectam fit. Sit $f(v)$ vis resistentiae, erit

$$dv = -f(v)dt, \qquad \text{ideoque } v\,dv = -f(v)ds,$$

unde sequitur, designantibus α et β Constantes Arbitrarias,

$$4.\qquad s = -\int\frac{v\,dv}{f(v)} + \alpha, \qquad t = -\int\frac{dv}{f(v)} + \beta.$$

Si punctum, nulla vi sollicitatum praeter resistentiam medii, in data linea aut superficie moveri debet, eaedem valebunt aequationes (4.) inter arcum, velocitatem et tempus. Posteriore casu fit motus in linea superficiei brevissima, prorsus ac si punctum nullis omnino viribus sollicitatur; quippe resistentia nonnisi motus velocitatem mutat.

§. 7.

De curva ballistica.

Summus Geometra *Johannes Bernoulli* in *Actis Lipsiensibus ad a. 1719* motum puncti gravis in medio uniformi resistente ad Quadraturas revocavit, quoties resistentia *cuicunque velocitatis potestati* proportionalis est.*) Provocatus enim ut motum pro resistentia quadrato velocitatis proportionali construeret, statim generaliorem quaestionem solvit. Ill. *Legendre* Ballisticam docuit ad Quadraturas revocari, si resistentia proportionalis est quadrato velocitatis plus Constanti.**) Cum neque haec neque illa quaestio in tractatibus mechanicis inveniatur, paucis examinabo Ballisticam si resistentia medii est proportionalis cuicunque velocitatis potentiae plus Constanti. Quae suppositio utramque questionem illam amplectitur.

*) Ipsa qua usus est Analysis legitur in Actis Lips. ad a. 1721.

**) *Legendre* sur la question de Balistique Berl. 1782. pag. 59.

Sit resistentia $a+bv^n$, designantibus a et b Constantes, fiunt aequationes dynamicae,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{dt} = -(a+bv^n)\frac{x'}{v},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = -(a+bv^n)\frac{y'}{v}-g.$$

E quibus sequitur,

$$(a+bv^n)(x'dy'-y'dx') = gv\,dx',$$

unde ponendo $x' = v\cos\eta$, $y' = v\sin\eta$, fit,

$$v(a+bv^n)d\eta = g\,dx' = g[\cos\eta\,dv - v\sin\eta\,d\eta],$$

sive

$$g.\cos\eta.v^{-(n+1)}dv - (a+g\sin\eta)v^{-n}d\eta = b\,d\eta.$$

Ponamus partem laevam aequationis antecedentis per idoneum factorem multiplicatam evadere aequalem differentiali, $d.Mv^{-n}$, erit

$$\frac{dM}{M} = \frac{n(a+g\sin\eta)d\eta}{g\cos\eta},$$

unde

$$1.\quad M = \cos\eta^{-n}.\text{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\eta)^{\frac{na}{g}},$$

atque ipse Multiplicator evadit,

$$-\frac{nM}{g\cos\eta}.$$

Hinc nanciscimur Integrale

$$2.\quad Mv^{-n} = -\frac{n}{g}\int\frac{bM\,d\eta}{\cos\eta}.$$

Quae valet formula, si b est quaecunque ipsius η functio; valeret etiam si insuper a ipsius η functio supponitur, dummodo in expressione (1.) alterum ipsius M factorem mutas.

Ponatur

$$r = \text{tang}(45^\circ)+\tfrac{1}{2}\eta),$$

unde

$$\cos\eta = \frac{2r}{1+rr},\quad \sin\eta = \frac{rr-1}{1+rr},\quad \frac{d\eta}{\cos\eta} = \frac{dr}{r}.$$

Hinc ponendo

$$\frac{a}{g} = c,$$

eruitur

$$3.\quad M = 2^{-n}r^{n(c-1)}(1+rr)^n.$$

Unde

$$4.\quad 2^nMv^{-n} = -\frac{nb}{g}\int r^{n(c-1)}(1+rr)^n\frac{dr}{r},$$

quae formula finita evadit quoties n est numerus positivus integer. Prae

ceteris evadit simplex ipsius v expressio per r, si supponitur,

$$\frac{a}{g} = c = \frac{n+2}{n};$$

tum enim e formula antecedente fit,

$$r^2(1+rr)^n v^{-n} = \frac{nb}{2(n+1)}(1+rr)^{n+1} + \alpha,$$

designante α Constantem Arbitrariam.

Determinata v per r, formulae generales dabunt ipsarum x, y, t expressiones per eandem quantitatem solarum Quadraturarum ope. Designante enim W resistentiam, habentur aequationes,

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{x'}{v}W, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{y'}{v}W - g,$$

unde

$$W(x'dy' - y'dx') = gv\,dx',$$

sive

$$5. \quad vW d\eta = g\,dx'.$$

Ex his formulis sequitur

$$6. \quad \begin{cases} dt = -\dfrac{v\,dx'}{x'W} = -\dfrac{v\,d\eta}{g\cos\eta} = -\dfrac{v\,dr}{gr}, \\ dx = x'dt = -\dfrac{v^2\,d\eta}{g} = -\dfrac{2vv\,dr}{g(1+rr)}, \\ dy = y'dt = -\dfrac{v^2\tang\eta\,d\eta}{g} = -\dfrac{vv(rr-1)\,dr}{gr(1+rr)}. \end{cases}$$

Substituendo in his formulis generalibus expressionem velocitatis v per η vel r et integrando, ipsarum t, x, y valores prodeunt. Si in formulis (3.) et (4.) ponitur $a = c = 0$, $n = 2$, formulae vulgo traditae obtinentur.

Reductio ad Quadraturas succedit etiam si resistentia exprimitur formula, $a + b\log v$. Quam ulterius non persequor hypothesin cum a natura abhorreat et formulis antecedentibus subsummatur scribendo ipsarum a et b loco $a - \frac{b}{n}$ et $\frac{b}{n}$ ac deinde ponendo $n = 0$.

Veteres autores ut approximationes obtinerent, praeeunte *Neutono* Constantis b loco functiones ipsius η ponebant non multum variantes et pro ipsis v, x, y, t faciles Quadraturas suppeditantes. Cujus rei exempla varia in Commentatione ill. *Legendre* videas; sed ejusmodi approximationum methodi nimis vagae videntur.

Reg. d. 27 Martis 1842.

3.

Demonstratio Nova Theorematis Abeliani.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. ord. Regiom.)

1.

Proponantur inter n variabiles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ atque variabilem t aequationes differentiales primi ordinis,

$$
1. \quad \begin{cases}
\dfrac{d\lambda_1}{\sqrt{(f(\lambda_1))}} + \dfrac{d\lambda_2}{\sqrt{(f(\lambda_2))}} \cdots + \dfrac{d\lambda_n}{\sqrt{(f(\lambda_n))}} = 0, \\
\dfrac{\lambda_1\, d\lambda_1}{\sqrt{(f(\lambda_1))}} + \dfrac{\lambda_2\, d\lambda_2}{\sqrt{(f(\lambda_2))}} \cdots + \dfrac{\lambda_n\, d\lambda_n}{\sqrt{(f(\lambda_n))}} = 0, \\
\dfrac{\lambda_1^2\, d\lambda_1}{\sqrt{(f(\lambda_1))}} + \dfrac{\lambda_2^2\, d\lambda_2}{\sqrt{(f(\lambda_2))}} \cdots + \dfrac{\lambda_n^2\, d\lambda_n}{\sqrt{(f(\lambda_n))}} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\lambda_1^{n-2}\, d\lambda_1}{\sqrt{(f(\lambda_1))}} + \dfrac{\lambda_2^{n-2}\, d\lambda_2}{\sqrt{(f(\lambda_2))}} \cdots + \dfrac{\lambda_n^{n-2}\, d\lambda_n}{\sqrt{(f(\lambda_n))}} = 0, \\
\dfrac{\lambda_1^{n-1}\, d\lambda_1}{\sqrt{(f(\lambda_1))}} + \dfrac{\lambda_2^{n-1}\, d\lambda_2}{\sqrt{(f(\lambda_2))}} \cdots + \dfrac{\lambda_n^{n-1}\, d\lambda_n}{\sqrt{(f(\lambda_n))}} = dt,
\end{cases}
$$

designante $f(\lambda)$ functionem quantitatis λ ordinis $(2n-1)^{\text{ti}}$. Ponendo

$$N_k = (\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \ldots (\lambda_k - \lambda_n),$$

ubi factor evanescens $(\lambda_k - \lambda_k)$ omittendus est, ex aequationibus (1.) sequuntur hae:

$$2. \quad \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{\sqrt{(f(\lambda_1))}}{N_1}, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{\sqrt{(f(\lambda_2))}}{N_2}, \quad \ldots \quad \frac{d\lambda_n}{dt} = \frac{\sqrt{(f(\lambda_n))}}{N_n}.$$

Substituendo enim (2.) aequationibus (1.) satisfieri per formulas notas algebraicas constat. Formularum (1.) sponte habentur Integralia transcendentia; earundem ut inveniantur Integralia algebraica, antemittam Lemma e theoria fractionum simplicium petitum.

2.

Dedit olim ill. *Lagrange* in Actis Acad. Berol. a. 1792 hujusmodi formulas pro discerptione fractionis in simplices, quae mutationem non subeant, si plures denominatoris factores inter se aequales existunt. Quas formulas cum ill. autor sine demonstratione proposuisset, addita demonstratione tractavi in Commentatione „Disquisitiones Analyticae de fractionibus simpli-

cibus" (Berol. 1825 ap. Herbig). Revocavi eo loco Propositionem *Lagrangianam* ad hanc:

Fractione $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, *cujus denominator* $\varphi(x)$ *factorem* $x-a$ *continet, in fractiones simplices resoluta, eam fractionum simplicium partem, quae ex illo factore ortum ducit, quotiescunque eum contineat denominatur* $\varphi(x)$, *aequari Coëfficienti termini* $\frac{1}{h}$ *in evolutione expressionis*

$$\frac{\psi(x+h)}{\varphi(x+h)(x-a-h)},$$

secundum ascendentes quantitatis h potestates facta.

Demonstrationem simplicem hujus Propositionis videas in Comm. cit. §. 10. Eandem Propositionem etiam sic exhibui (l. c. §. 7.),

Si summa factoris $x-\alpha$ *potestas per quam denominator* $\varphi(x)$ *dividi potest est* $(x-\alpha)^m$ *atque ponitur*

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\Pi(x)}{(x-\alpha)^m},$$

Aggregatum fractionum simplicium, quarum denominatores fiunt ejus factoris potestates, aequatur quantitati

$$\frac{1}{1.2\ldots.(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1} \cdot \frac{\Pi\alpha}{x-\alpha}}{\partial\alpha^{m-1}}.$$

Sit $\psi(\lambda)$ functio ipsius λ integra rationalis ac proponatur fractio

$$\frac{\psi(\lambda)}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots.(\lambda-\lambda_n)]^m},$$

in fractiones simplices resolvenda. Secundum Propositionem antecedentem fit Aggregatum fractionum simplicium e factore $\lambda-\lambda_k$ provenientium,

$$\frac{1}{1.2\ldots.(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1}\left(\frac{\psi(\lambda_k)}{N_k^m} \cdot \frac{1}{\lambda-\lambda_k}\right)}{\partial\lambda_k^m}.$$

Unde totum systema fractionum simplicium, in quas fractio proposita resolvitur, aequatur Aggregato,

$$\frac{1}{1.2\ldots.(m-1)} \Sigma \frac{\partial^{m-1}\left(\frac{\psi(\lambda_k)}{N_k^m} \cdot \frac{1}{\lambda-\lambda_k}\right)}{\partial\lambda_k^m},$$

summatione extensa ad indicis k valores $1, 2, \ldots. n$. Facta evolutione secundum potestates ipsius λ descendentes, obtinemus hanc Propositionem:

Evoluta fractione $\frac{\psi(\lambda)}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots.(\lambda-\lambda_n)]^m}$ secundum potestates quantitatis λ descendentes, Coëfficientem termini $\frac{1}{\lambda^p}$ aequari quantitati,

$$\frac{1}{1.2\ldots.(m-1)}\Sigma\frac{\partial^{m-1}.\frac{\lambda_k^{p-1}\psi(\lambda_k)}{N_k^m}}{\partial\lambda_k^m}.$$

Haec Propositio valet etiam si nominatoris $\psi(x)$ gradus gradum denominatoris mn superat; eo enim casu fractionibus simplicibus accedit functio integra rationalis qui est divisionis Quotiens; e functionis integrae rationalis evolutione autem potestates negativae $\frac{1}{\lambda^p}$ provenire nequeunt, unde formula antecedens non mutatur. Si denominatoris gradus numeratoris gradum superat i unitatibus, evolutio proposita terminis $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \ldots. \frac{1}{\lambda^{i-1}}$ caret. Eo igitur casu quantitates,

$$\Sigma\frac{\partial^{m-1}.\frac{\lambda_k^{p-1}\psi(\lambda_k)}{N_k^m}}{\partial\lambda_k^m},$$

pro ipsius p valoribus $1, 2, \ldots. i-1$ evanescunt. Ad sequentia tantum egemus formula in qua $i=2$, $p=1$, $m=2$. Quam suppeditat sequens

Lemma.

Sit $\psi(\lambda)$ functio quantitatis λ integra rationalis $(2n-2)^{ti}$ gradus, erit

$$\Sigma\frac{\partial\frac{\psi(\lambda_k)}{N_k N_k}}{\partial\lambda_k}=0.$$

Hoc Lemmate comprobato ad propositum redeo.

3.

Sit $m-\lambda$ factor functionis $f(\lambda)$ quicunque, unde posito,

$$\frac{f(\lambda)}{m-\lambda}=\psi(\lambda),$$

fit $\psi(\lambda)$ functio rationalis integra $(2n-2)^{ti}$ gradus. Sit br. c.,

$$\lambda_k'=\frac{d\lambda_k}{dt},\qquad \lambda_k''=\frac{d^2\lambda_k}{dt^2},$$

erit secundum formulas (2.) §. 1.,

$$\frac{\lambda_k'}{\sqrt{(m-\lambda_k)}}=\frac{\sqrt{(\psi(\lambda_k))}}{N_k}.$$

Unde rursus differentiando et substituendo valores quantitatum λ'_1, λ'_2 etc. e §. 1. petitos obtinetur,

$$1.\quad \frac{d.\frac{\lambda'_k}{\sqrt{(m-\lambda_k)}}}{\sqrt{(m-\lambda_k)}.dt} = \frac{\partial.\frac{\sqrt{(\psi(\lambda_k))}}{N_k}}{\partial\lambda_k}.\frac{\sqrt{(\psi(\lambda_k))}}{N_k} + \overset{i}{\Sigma}\frac{\sqrt{(\psi(\lambda_i))}\sqrt{(\psi(\lambda_k))}}{\sqrt{(m-\lambda_i)}\sqrt{(m-\lambda_k)}}.\frac{(m-\lambda_i)\partial\frac{1}{N_k}}{N_i\,\partial\lambda_i},$$

summationis signo pertinente ad indicis superscripti valores 1, 2, ... n omnes praeter $i=k$. Fit autem

$$\frac{\partial.\frac{\sqrt{(\psi(\lambda_k))}}{N_k}}{\partial\lambda_k}.\frac{\sqrt{(\psi(\lambda_k))}}{N_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial.\frac{\psi(\lambda_k)}{N_k N_k}}{\partial\lambda_k},\qquad \frac{\partial.\frac{1}{N_k}}{\partial\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_k-\lambda_i}.\frac{1}{N_k}.$$

Unde e (1.) fit advocato Lemmate demonstrato,

$$\overset{k}{\Sigma}\frac{d.\frac{\lambda'_k}{\sqrt{(m-\lambda_k)}}}{\sqrt{(m-\lambda_k)}dt} = \overset{k}{\Sigma}\overset{i}{\Sigma}\frac{\sqrt{(\psi(\lambda_i))}\sqrt{(\psi(\lambda_k))}}{\sqrt{(m-\lambda_i)}\sqrt{(m-\lambda_k)}N_i N_k}.\frac{m-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}.$$

Summa duplex in formula praecedente pertinet ad omnes valores 1, 2, ... n quos uterque index i et k induere potest, exclusis valoribus aequalibus $i=k$. Si quantitati sub signo duplici summationis collocatae additur altera e commutatione indicum i et k proveniens, summatio tantum extendi debet ad combinationes diversas indicum 1, 2, ... n, ita ut e positionibus $i=\alpha$, $k=\beta$ et $i=\beta$, $k=\alpha$, altera tantum eligenda sit. Quod si de summa duplici statuimus atque observamus fieri, $\frac{m-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}+\frac{m-\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}=1$, expressio antecedens in hanc abit,

$$2.\quad \overset{k}{\Sigma}\frac{d.\frac{\lambda'_k}{\sqrt{(m-\lambda_k)}}}{\sqrt{(m-\lambda_k)}dt} = \overset{k}{\Sigma}\overset{i}{\Sigma}\frac{\sqrt{(\psi(\lambda_i))}\sqrt{(\psi(\lambda_k))}}{\sqrt{(m-\lambda_i)}\sqrt{(m-\lambda_k)}N_i N_k} = \overset{k}{\Sigma}\overset{i}{\Sigma}\frac{\lambda'_i\lambda'_k}{(m-\lambda_i)(m-\lambda_k)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda'_1}{m-\lambda_1}+\frac{\lambda'_2}{m-\lambda_2}\ldots\ldots+\frac{\lambda'_n}{m-\lambda_n}\right]^2$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda'_1\lambda'_1}{(m-\lambda_1)^2}+\frac{\lambda'_2\lambda'_2}{(m-\lambda_2)^2}\ldots\ldots+\frac{\lambda'_n\lambda'_n}{(m-\lambda_n)^2}\right].$$

Fit autem,

$$\overset{k}{\Sigma}\frac{d.\frac{\lambda'_k}{\sqrt{(m-\lambda_k)}}}{\sqrt{(m-\lambda_k)}dt} = \overset{k}{\Sigma}\left[\frac{\lambda''_k}{m-\lambda_k}+\frac{1}{2}\frac{\lambda'_k\lambda'_k}{(m-\lambda_k)^2}\right].$$

Unde aequatio (2.) in hanc abit

$$3. \quad 0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_1'}{m-\lambda_1} + \frac{\lambda_2'}{m-\lambda_2} \cdots + \frac{\lambda_n'}{m-\lambda_n}\right)^2$$
$$-\left(\frac{\lambda_1'\lambda_1'}{(m-\lambda_1)^2} + \frac{\lambda_2'\lambda_2'}{(m-\lambda_2)^2} \cdots + \frac{\lambda_n'\lambda_n'}{(m-\lambda_n)^2}\right)$$
$$-\left(\frac{\lambda_1''}{m-\lambda_1} + \frac{\lambda_2''}{m-\lambda_2} \cdots + \frac{\lambda_n''}{(m-\lambda_n)^2}\right).$$

Ponatur

$$4. \quad y = \sqrt{[(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\ldots(m-\lambda_n)]},$$

si insuper fit $u = \log y$, erit

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = y\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2 u}{dt^2}\right].$$

Fit autem

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1'}{m-\lambda_1} + \frac{\lambda_2'}{m-\lambda_2} \cdots + \frac{\lambda_n'}{m-\lambda_n}\right),$$
$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1'\lambda_1'}{(m-\lambda_1)^2} + \frac{\lambda_2'\lambda_2'}{(m-\lambda_2)^2} \cdots + \frac{\lambda_n'\lambda_n'}{(m-\lambda_n)^2}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1''}{m-\lambda_1} + \frac{\lambda_2''}{m-\lambda_2} \cdots + \frac{\lambda_n''}{m-\lambda_n}\right),$$

unde aequatio (3.) per 2 divisa, in hanc abit

$$0 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2 u}{dt^2},$$

sive

$$5. \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Qua formula integrata et substitutis valoribus, $\lambda_k' = \frac{\sqrt{(f(\lambda_k))}}{N_k}$, obtinetur e (4.)

$$6. \quad -2\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\sqrt{(f(\lambda_1))}}{(m-\lambda_1)N_1} + \frac{\sqrt{(f(\lambda_2))}}{(m-\lambda_2)N_2} \cdots + \frac{\sqrt{(f(\lambda_n))}}{(m-\lambda_n)N_n}\right) = \text{Const.}$$

Haec formula constituit Integrale algebraicum aequationum differentialium propositarum ex eoque obtinentur $2n-1$ Integralia algebraica, pro singulis functionis $f(\lambda)$ factoribus linearibus $m-\lambda$. Sufficit autem numerus $n-1$ ad relationes algebraicas inter n variabiles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ condendas. Non immorabor hic formulae

$$\text{Const.} = y\left(\frac{\sqrt{(f(\lambda_1))}}{(m-\lambda_1)N_1} + \frac{\sqrt{(f(\lambda_2))}}{(m-\lambda_2)N_2} \cdots + \frac{\sqrt{(f(\lambda_n))}}{(m-\lambda_n)N_n}\right),$$

e theoremate *Abeliano* deducendae. Quas res apud cl. *Richelot* videas in egregia Commentatione qua *Lagrangianam* integrationis methodum pro $n=2$ exhibitam amplificatum it ejusque methodi adiumento duo Integralia alge-

braica pro ipsius n valore quocunque, immo pro forma functionis $f(\lambda)$ generaliore eruit. Et forte methodum quoque antecedentibus a me usurpatam qua cuncta Integralia algebraica obtinentur, pro amplificatione methodi *Lagrangianae* habere placet.

Si ipsi $f(\lambda)$ formam tribuis functionis rationalis integrae $2n^{ti}$ ordinis, per substitutionem obviam $\lambda = \frac{m+nz}{1+pz}$, problema ad eum casum revocas quo $f(\lambda)$ tantum $(2n-1)^{ti}$ ordinis est. Illo casu generaliore non amplius evanescit summa,

$$\sum^{k} \frac{\partial \cdot \frac{\psi(\lambda_k)}{N_k N_k}}{\partial \lambda_k},$$

sed ea summa cum secundum ea quae §. 2. demonstravi, aequet Coëfficientem termini $\frac{1}{\lambda}$ in evolutione quantitatis,

$$\frac{\psi(\lambda)}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots.(\lambda-\lambda_n)]^2},$$

aequalis evadit Constanti $-c$, si quidem $c\lambda^{2n}$ est altissimus functionis $f(\lambda)$ terminus. Hinc aequatio antecedentibus inventa,

$$0 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2u}{dt^2},$$

in hanc mutari debet,

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d^2u}{dt^2} = \tfrac{1}{4}c,$$

unde sequitur aequatio haec,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \tfrac{1}{4}c.y,$$

quae multiplicata per $2\frac{dy}{dt}$ et integrata suggerit,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{4}cyy+\alpha,$$

designante α Constantem Arbitrariam. In qua formula si substituuntur quantitatum y et $\frac{dy}{dt}$ valores (4.) et (6.), proveniunt Integralia algebraica formae functionis $f(\lambda)$ generaliori respondentia.

4.

Coronidis instar hoc addo. *Quicunque sit functionis* $f(\lambda)$ *gradus* si designante $m-\lambda$ factorem eius quemcunque vocamus (m), Coëfficientem

termini $\frac{1}{\lambda}$ in evolutione quantitatis,

$$\frac{\frac{f(\lambda)}{m-\lambda}}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots.(\lambda-\lambda_n)]^2},$$

suggerit Analysis antecedentibus adhibita formulam,

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{d^2u}{dt^2}+\tfrac{1}{4}(m)=0.$$

Unde multiplicatione per y facta prodit,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\tfrac{1}{4}y(m)=0.$$

Sit y_1 altera functio, ipsius $f(\lambda)$ factori $m_1-\lambda$ respondens, ita ut habeatur,

$$y=\sqrt{[(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\ldots.(m-\lambda_n)]},$$
$$y_1=\sqrt{[(m_1-\lambda_1)(m_1-\lambda_2)\ldots.(m_1-\lambda_n)]},$$

erit,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\tfrac{1}{4}y(m)=0,\qquad \frac{d^2y_1}{dt^2}+\tfrac{1}{4}y_1(m_1)=0,$$

unde

$$y\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2y}{dt^2}+\tfrac{1}{4}yy_1[(m_1)-(m)]=0.$$

Cum sit $\frac{1}{m_1-\lambda}-\frac{1}{m-\lambda}=\frac{m-m_1}{(m-\lambda)(m_1-\lambda)}$, aequabit $(m_1)-(m)$ Coëfficientem termini $\frac{1}{\lambda}$ in evolutione quantitatis,

$$\frac{\frac{f(\lambda)}{(m-\lambda)(m_1-\lambda)}}{[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots.(\lambda-\lambda_n)]^2},$$

multiplicatum per $m-m_1$. Quem Coëfficientem designo per (m, m_1), unde fit,

$$y\frac{d^2y_1}{dt}-y_1\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{m-m_1}{4}yy_1(m,m_1)=0,$$

unde integratione facta,

$$1.\quad y\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dy}{dt}+\frac{m-m_1}{4}\int yy_1(m,m_1)\,dt=0.$$

Quae docet formula, *integrale* $\int yy_1(m,m_1)\,dt$ *valorem obtinere algebraicum.* Sit ex. gr. functio $f(\lambda)$ gradus $(2n+1)^{ti}$ eiusque summus terminus $c\lambda^{2n+1}$, erit $(m,m_1)=c$ ideoque substituendo formulam 6. §. pr. eruitur,

$$2.\quad \int yy_1\,dt=\frac{-4}{m-m_1}\left[y\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dy}{dt}\right]$$

$$=2yy_1\left[\frac{\sqrt{(f(\lambda_1))}}{(m-\lambda_1)(m_1-\lambda_1)N_1}+\frac{\sqrt{(f(\lambda_2))}}{(m-\lambda_2)(m_1-\lambda_2)N_2}\ldots.+\frac{\sqrt{(f(\lambda_n))}}{(m-\lambda_n)(m_1-\lambda_n)N_n}\right].$$

Si $m = m_1$ atque

$$\sqrt{(f(\lambda))} = (m-\lambda)\sqrt{(F(\lambda))},$$

aequatio antecedens in hanc abit,

$$3. \quad c\int(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\ldots.(m-\lambda_n)dt =$$

$$2(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\ldots.(m-\lambda_n)\left[\frac{\sqrt{(F(\lambda_1))}}{(m-\lambda_1)N_1}+\frac{\sqrt{(F(\lambda_2))}}{(m-\lambda_2)N_2}\ldots.+\frac{\sqrt{(F(\lambda_n))}}{(m-\lambda_n)N_n}\right].$$

Convenit ut in genere novo formularum exemplum addere. Sit quod est simplicissimum,

$$f(\lambda) = \sqrt{(\lambda^5)},$$

unde

$$m = 0, \quad c = 1, \quad F(\lambda) = -\sqrt{(\lambda^3)};$$

erunt aequationes differentiales propositae,

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^5}}+\frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^5}} = 0, \qquad \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^3}}+\frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^3}} = dt,$$

e quibus secundum (3.) fieri debet,

$$\int\lambda_1\lambda_2\,dt = 2\lambda_1\lambda_2.\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}.$$

Aequationes differentiales propositae suggerunt,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^3}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^3}} = \alpha, \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = -\tfrac{1}{2}t,$$

designante α Constantem Arbitrariam; unde ponendo $\frac{1}{\sqrt{(\lambda_1\lambda_2)}} = u$ fit,

$$\alpha = -\tfrac{1}{8}t^3+\tfrac{3}{2}tu,$$

$$\int\lambda_1\lambda_2\,dt = \int\frac{dt}{uu} = \tfrac{9}{4}\int\frac{t^2\,dt}{(\alpha+\frac{1}{8}t^3)^2} = \frac{-6}{\alpha+\frac{1}{8}t^3}.$$

Fit autem $\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2} = -\frac{1}{2}\sqrt{(\lambda_1\lambda_2)}t$, unde

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} = -\frac{2}{tu} = \frac{-3}{\alpha+\frac{1}{8}t^3},$$

ideoque $\int\lambda_1\lambda_2\,dt = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}$, q. d. e.

Regiom. d. 5 Maii 1842.

4.

Ueber die Construction der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Puncte gegeben sind.

(Vom Hrn. Dr. *Hesse*, Privatdocenten an der Universität zu Königsberg.)

1.

Es ist eine für die Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung wichtige und von den Geometern oftmals zur Lösung empfohlene Aufgabe:

„Mit Hülfe von 9 beliebigen Puncten einer Oberfläche zweiter Ord-„nung einen beliebigen zehnten derselben Oberfläche auf lineäre Weise „zu construiren."

Soviel ich weifs, ist bis jetzt keine Auflösung der vorliegenden Aufgabe veröffentlicht worden. In den folgenden Paragraphen werde ich eine in ihren Prinzipien einfache, wenn gleich in der Ausführung weitläuftige Auflösung jener Aufgabe auseinandersetzen.

2.

Diese Auflösung beruht auf der Anwendung folgendes Lehrsatzes:

„Die Polar-Ebenen eines beliebigen Punctes P in einem Systeme „Oberflächen, welche durch sieben gegebene Puncte hindurchgehen, „schneiden sich in einem und demselben Puncte Q.

Um diesen Lehrsatz (den ich irgendwo gelesen zu haben mich erinnere, und der auch aus dem unten *) angegebenen, von *Lamé* aufgestellten Satze leicht sich ableiten läfst) zu beweisen, nehmen wir an, U, V, W seien beliebige homogene Functionen des zweiten Grades zwischen den Variabeln x, y, z, p. Wir bezeichnen die Ausdrücke

---

*) Wenn man den Punct P in die Unendlichkeit fallen läfst, so erhält man den Satz:

„Die parallelen Diameter conjugirten Diametral-Ebenen in einem System Oberflächen „zweiter Ordnung, welche durch 7 gegebene Puncte hindurchgehen, oder, was „dasselbe ist, welche alle dieselben Schnittpuncte haben, treffen in einem und dem-„selben Puncte zusammen."

Diesen Satz stellt *Lamé* in seinem Werke auf: *Examen des differentes methodes employées pour resoudre les problemes de Geometrie p. 37.*

$$x_1\frac{\partial U}{\partial x}+y_1\frac{\partial U}{\partial y}+z_1\frac{\partial U}{\partial z}+p_1\frac{\partial U}{\partial p};\qquad x_1\frac{\partial V}{\partial x}+y_1\frac{\partial V}{\partial y}+z_1\frac{\partial V}{\partial z}+p_1\frac{\partial V}{\partial p};$$
$$x_1\frac{\partial W}{\partial x}+y_1\frac{\partial W}{\partial y}+z_1\frac{\partial W}{\partial z}+p_1\frac{\partial W}{\partial p}$$

respective durch U_1, V_1, W_1. Nimmt man nun die Gröfsen $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{p}$, $\frac{z}{p}$ für die Coordinaten eines beliebigen Punctes im Raume, so stellen die Gleichungen $U=0$, $V=0$, $W=0$ drei beliebige Oberflächen zweiter Ordnung dar und die Gleichung

$$\varkappa U+\lambda V+\mu W=0,$$

in welcher die Coëfficienten $\varkappa$, λ, μ willkürlich sind, stellt jede beliebige Oberfläche zweiter Ordnung dar, welche durch die gemeinsamen Schnittpuncte der drei erwähnten Oberflächen hindurchgeht. Wir können also sagen, dafs die letzte Gleichung das System Oberflächen repräsentire, welches durch die gemeinsamen Schnittpuncte der drei Oberflächen sich legen läfst. Die Anzahl der erwähnten gemeinsamen Schnittpuncte ist 8. Allein da jede Oberfläche zweiter Ordnung, die durch 7 gegebene Puncte hindurchgeht, noch einen durch die 7 bestimmten achten Punct trifft *): da ferner jede beliebigen 7 Puncte als Schnittpuncte von drei bestimmten Oberflächen zweiter Ordnung betrachtet werden können, so stellt obige Gleichung, mit passend gewählten Functionen U, V, W des zweiten Grades, das ganze System Oberflächen zweiter Ordnung dar, welches durch 7 beliebige Puncte im Raume hindurchgeht. Bezeichnet man nun durch $\frac{x_1}{p_1}$, $\frac{y_1}{p_1}$, $\frac{z_1}{p_1}$ die Coordinaten eines bestimmten Punctes P im Raume, so repräsentiren die Gleichungen $U_1=0$, $V_1=0$, $W_1=0$ die Polar-Ebenen des Punctes P respective für die Oberflächen $U=0$, $V=0$, $W=0$ und die Gleichung

$$\varkappa U_1+\lambda V_1+\mu W_1=0$$

repräsentirt das ganze System Polar-Ebenen des Punctes P in dem Systeme Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die 7 erwähnten Puncte hindurchgehen. Da aber die letzte Gleichung für den Schnittpunct Q der Polar-Ebenen $U_1=0$, $V_1=0$, $W_1=0$ erfüllt wird, so geht das ganze System Polar-Ebenen durch eben diesen Punct hindurch. Die Puncte P und Q können wir, mit Herrn Professor *Steiner*, zugeordnete Pole in Rücksicht auf jede Oberfläche des Systems nennen. Denn jede dieser Oberflächen schneidet die Grade PQ in harmonischen Puncten.

*) Man vergleiche *Crelle's* Journal Bd. 20. S. 297, Theorema 8.

3.

Es bietet sich nun zunächst folgende Aufgabe dar.

Aufgabe. 1.

„Wenn beliebige 7 Puncte des Raumes gegeben sind (welche wir durch „1, 2, 3, ... 7 bezeichnen wollen), und aufserdem ein Punct P: so soll „man den harmonischen Pol Q des letztern construiren, in Rücksicht „auf das ganze System Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch „die 7 Puncte hindurchgehen."

Die Auflösung dieser Aufgabe zerfällt 1) in die Construction der Generatricen von drei Hyperboloïden, welche durch die 7 Puncte gehen, 2) in die Construction der Polar-Ebenen des Punctes P rücksichtlich dieser Hyperboloïden, welche Ebenen sich in dem gesuchten Puncte Q schneiden werden.

1. Es ist leicht zu sehen, dafs, wenn man die Puncte 1, 2 und 3, 4 durch zwei gerade Linien verbindet und durch die übrigen Puncte 5, 6, 7 die drei Linien zieht, deren jede die beiden ersten schneidet, dafs dann diese drei Linien die Generatricen eines Hyperboloïds sein werden, welches durch die 7 Puncte hindurchgeht.

Man erhält auf diese Weise noch zwei andere Hyperboloïden, wenn man die 4 ersten Puncte mit einander vertauscht und die drei letzten ungeändert läfst. Es lassen sich auf die beschriebene Weise durch Vertauschung aller Puncte dreimal die Zahl der Combinationen von 7 Elementen zur dritten Classe, also 105 Hyperboloïden angeben (wenn nicht einige derselben zusammenfallen), welche sämmtlich durch die 7 Puncte hindurchgehen.

2. Es bleibt nun noch zu zeigen übrig, wie man die Polar-Ebene des Punctes P für eins von den 105 Hyperboloïden construiren könne. Zieht man zu diesem Zwecke durch den Punct P drei Linien, von welchen jede durch zwei Generatricen des in Rede stehenden Hyperboloïds hindurchgeht, so werden die Schnittpuncte Puncte der Oberfläche sein. Construirt man daher auf jeder von diesen Linien den 4ten, dem Puncte P correspondirenden harmonischen Punct, so liegen die drei construirten Puncte auf der Polar-Ebene des Punctes P und die, die drei Puncte verbindende Ebene wird die gesuchte Polar-Ebene des Punctes P sein.

Der gesuchte Punct Q ergiebt sich nun als der Schnittpunct von drei solchen Polar-Ebenen des Punctes P, welche sich auf drei verschiedene Hyperboloïden des Systems beziehen.

4.

Der vorhergehende Paragraph enthält die Elemente zur Lösung der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 2.

„Die Polar-Ebene eines beliebig im Raume angenommenen Punctes P „rücksichtlich einer Oberfläche zweiter Ordnung zu construiren, welche „durch irgend 9 in ihr beliebig gegebene Puncte bestimmt ist."

Sondern wir von den gegebenen 9 Puncten 1, 2, 3, ... 9 die beiden letzten ab und construiren zum Puncte P den harmonischen Pol Q in dem Systeme Oberflächen, welche durch die Puncte 1, 2, ... 7 hindurchgehen, so ist dieser Punct allen Polar-Ebenen des Punctes P in dem Systeme gemeinschaftlich. Da aber unter den verschiedenen Oberflächen des Systems sich auch diejenige befindet, welche durch die 9 Puncte bestimmt wird, so mufs der Punct Q rücksichtlich dieser Oberfläche in der Polar-Ebene des Punctes P liegen. Wir sind also im Stande, indem wir die 9 Puncte miteinander vertauschen, auf die angegebene Weise so viel Puncte Q der gesuchten Polar-Ebene von P zu construiren, als sich 9 Elemente zur zweiten Classe combiniren lassen, d. i. 36 Puncte.

Wenn wir demnach drei von diesen Puncten bestimmen und eine Ebene durch dieselbe legen, so mufs dieselbe die gesuchte Polar-Ebene sein, und die übrigen 33 Puncte werden in ihr liegen.

5.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen ergiebt sich nun die Auflösung der §. 1. vorgelegten Aufgabe wie folgt.

Man nehme im Raume einen Punct P beliebig an, construire die Polar-Ebene dieses Punctes rücksichtlich der durch die gegebenen 9 Puncte bestimmten Oberfläche 2ter Ordnung, verbinde den Punct P durch eine gerade Linie mit einem der gegebenen 9 Puncte und bestimme zu letzterem, dem Schnittpuncte der Polar-Ebene mit der geraden Linie und dem Puncte P, den conjugirten harmonischen Punct R: so liegt dieser auf der durch die 9 Puncte bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung.

Bewegt man endlich den Punct P durch alle Puncte des Raumes oder einer beliebigen Ebene, so beschreibt der entsprechende Punct R die gesuchte Oberfläche zweiter Ordnung.

Königsberg am 5ten Februar 1842.

5.

Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloïd.

(Vom Hrn. Dr. *Hesse*, Privatdocenten an der Universität zu Königsberg.)

Wenn drei gerade, im Raum willkürlich liegende Linien a, b, c von drei andern a', b', c' geschnitten werden, so kann man die Linien aa', bb', cc' als die gegenüberliegenden Seiten eines Sechsecks betrachten, dessen aufeinanderfolgende Seiten ac', ba', cb' sind. Die gegenüberliegenden Ecken dieses Sechsecks bezeichnen wir durch AA', BB', CC', in der Art, dafs die Linien cb', ac', ba', bc', ca', ab' respective in A, B, C; A', B', C' zusammenlaufen. Alsdann bemerkt man leicht, dafs die drei durch die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks gelegten Ebenen sich gegenseitig in den drei Diagonalen AA', BB', CC' schneiden. Da aber diese Ebenen in einem Puncte p'' zusammenstofsen, so werden sich die genannten Diagonalen in eben demselben Puncte schneiden.

Auf gleiche Weise schneiden sich die Ebenen der gegenüberliegenden Winkel des Sechsecks in drei geraden Linien, welche in einer und derselben Ebene P'' liegen. Denn verlängert man die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks aa', bb', cc', bis sie sich respective in den Puncten A'', B'', C'' schneiden, so werden die Linien $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$ die Schnittlinien der Ebenen der gegenüberliegenden Winkel CC', AA', BB' sein. Da aber diese Linien das Dreieck $A''B''C''$ bilden, so müssen sie in einer und derselben Ebene liegen.

Durch die 6 Linien a, b, c, a', b', c' läfst sich ein Hyperboloïd legen. In Rücksicht auf dieses Hyperboloïd sind ABC, $A'B'C'$ die Tangirungspuncte der Ebenen, in welchen die durch dieselben Buchstaben bezeichneten Winkel des Sechsecks liegen. Die Ebenen der Winkel A und A', welche zugleich die Tangenten-Ebenen des Hyperboloïds in den Puncten A und A' sind, schneiden sich in der Linie, welche wir durch $B''C''$ bezeichnet haben. Diese Schnittlinie der Tangenten-Ebenen ist aber die reciproke Polare der Verbindungslinie der Tangirungspuncte AA'. Auf gleiche Weise werden die Linien $C''A''$ und $A''B''$ als die reciproken Polaren von BB' und CC' erkannt. Da aber die Linien AA', BB', CC' sich in einem Puncte

p'' schneiden, so müssen ihre reciproken Polaren in der Polar-Ebene des Punctes p'' liegen. Es ist mithin die Ebene P'' die Polar-Ebene von p''. Diese Bemerkungen lassen sich, wie folgt, zusammenfassen.

Lehrsatz 1.

Wenn man auf einem Hyperboloïd ein geradliniges Sechseck beschreibt, so schneiden sich die drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte, und die Ebenen der gegenüberliegenden Winkel des Sechsecks schneiden sich in drei Linien, welche in der Polar-Ebene des gemeinsamen Schnittpunctes der Diagonalen liegen.

Die blofse Anschauung der beschriebenen Figur lehrt, dafs dieselbe in allen ihren Theilen vervollständigt werden kann: 1) wenn die 3 Linien a, b, c und der Punct p'' gegeben sind, oder 2) wenn die 3 Linien a, b, c und die Ebene P'' gegeben sind. Die Vervollständigung der Figur im ersten Falle kommt mit der Lösung folgender Aufgabe überein.

Aufgabe 1.

Wenn drei Generatricen a, b, c eines Hyperboloïds und ein beliebiger Punct p'' gegeben sind, die Polar-Ebene dieses Punctes zu construiren.

Läfst man, um die Polar-Ebene P'' des gegebenen Punctes p'' zu bestimmen, eine Ebene durch p'' und a gehen und verbindet die Schnittpuncte dieser Ebene mit den Linien b und c durch eine Gerade a', legt hierauf eine zweite Ebene durch p'' und b und verbindet die Schnittpuncte dieser Ebene mit a und c durch eine Gerade b', legt endlich eine Ebene durch p'' und c und verbindet die Schnittpuncte dieser Ebene mit a und b durch eine Gerade c', so schneiden sich die Linienpaare aa', bb', cc' in drei Puncten A'', B'', C'', durch welche die gesuchte Parallel-Ebene hindurchgeht.

Im zweiten Falle hat man die folgende Aufgabe.

Aufgabe 2.

Wenn drei Generatricen a, b, c eines Hyperboloïds und eine Ebene P'' gegeben sind, den Pol dieser Ebene zu construiren.

Die 3 Linien a, b, c schneiden die gegebene Ebene P'' in drei Puncten, welche wir durch A'', B'', C'' bezeichnen. Durch diese Puncte ziehe man die drei Linien a', b', c', von welchen die erste b und c, die zweite c und a, die dritte a und b schneidet. Legt man alsdann 3 Ebenen

durch aa', bb', cc', so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Pole p'' der Ebene P''.*)

Die 6 Linien a, b, c, a', b', c' bilden 6 Sechsecke π, π', π'', $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, welche wir, indem wir die gegenüberliegenden Ecken eines jeden Sechsecks zusammenstellen, durch folgendes Schema ausdrücken wollen:

$\pi''\ldots AA',\ BB',\ CC',\qquad \varkappa''\ldots AB,\ A'B',\ A''B'',$

$\pi\ \ldots A'A''\ B'B''\ C'C'',\qquad \varkappa\ \ldots BC,\ B'C',\ B''C'',$

$\pi'\ldots A''A\ B''B\ C''C,\qquad \varkappa'\ldots CA,\ C'A',\ C''A''.$

Das Sechseck π'' ist dasjenige, welches wir betrachtet haben. Von den übrigen Sechsecken gilt ebenfalls der Lehrsatz 1. Bezeichnen wir demnach die Schnittpuncte der 3 Diagonalen der Sechsecke der Reihe nach durch p'', p, p'; q'', q, q', so liegen die drei ersten in einer geraden Linie und die drei letzten in einer zweiten geraden Linie. Denn es liegen die Puncte p'', p, p', respective auf den Geraden AA', $A'A''$, $A''A$. Da diese aber ein Dreieck bilden, so wird die Ebene des Dreiecks durch die drei Puncte p'', p, p' gehen. Eben so läfst sich nachweisen, dafs die Ebene des Dreiecks $B''BB'$, sowie, dafs die Ebene des Dreiecks $C''CC'$ durch die genannten Puncte geht. Wenn aber mehrere Puncte zugleich in drei Ebenen liegen, so müssen sich die Ebenen in einer und derselben Linie schneiden und die Puncte in dieser Schnittlinie liegen.

Auf gleiche Weise liegen die Puncte q'', q, q' in den drei Ebenen ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, welche sich deshalb in einer und derselben geraden Linie schneiden müssen.

Den Punct p'' haben wir aber als den Pol der Ebene $A''B''C''$ erkannt. Eben so werden p und p' die Pole der Ebenen ABC und $A'B'C'$ sein. Die gemeinsame Schnittlinie $q''qq'$ dieser Ebenen ist mithin die reciproke Polare der geraden Linie $p''pp'$. Dadurch ist folgender Lehrsatz bewiesen.

Lehrsatz 2.

Die Seiten des auf dem Hyperboloïd beschriebenen Sechsecks bilden noch 5 andere Sechsecke. Jedem der 6 Sechsecke entspricht ein Punct, in welchem sich die Diagonalen schneiden, welche die gegenüber-

*) Nimmt man die Ebene P'' in der Unendlichkeit liegend an, so wird der Pol p'' zum Mittelpunct des Hyperboloïds, dessen Construction Hr. Prof. Steiner im 2ten Bande dieses Journals gegeben hat.

liegenden Seiten des Sechsecks verbinden. Diese 6 Puncte liegen auf 2 geraden Linien, von denen die eine die reciproke Polare der andern ist.

Wenn man die drei Generatricen a, b, c sich einer Ebene unendlich nähern läfst, bis sie in dieselbe ihrer ganzen Länge nach hineinfallen, so fallen auch die drei andern Generatricen a', b', c' und das ganze Hyperboloïd, im Grenzfalle, mit der Ebene zusammen. Die sechs genannten Generatricen werden aber Tangenten eines Kegelschnittes, weil die Diagonalen der durch sie gebildeten 6 Sechsecke π'', π, π', $\varkappa''$, $\varkappa$, $\varkappa'$ sich respective in den Puncten p'', p, p', q'', q, q', schneiden. Die beiden geraden Linien $(p''pp')$ und $(q''qq')$ werden endlich harmonische Polaren des Kegelschnittes, d. h. solche Linien, welche mit den durch ihren gemeinsamen Schnittpunct gelegten Tangenten des Kegelschnittes vier harmonische Linien bilden. Demnach können wir zu den Sätzen von *Brianchon* und *Steiner:* „Irgend 6 Tangenten eines Kegelschnittes bestimmen 60 umschriebene Sechsecke; in jedem derselben schneiden sich die drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, in einem Puncte $\mathfrak{P}$; die 60 Puncte $\mathfrak{P}$, welche den 60 Sechsecken entsprechen, liegen, zu dreien, auf 20 geraden Linien vertheilt," noch hinzufügen, „dafs die 20 geraden Linien 10 Paare harmonischer Polaren des Kegelschnitts bilden."

Der Lehrsatz 2. kann mit andern Worten wie folgt ausgesprochen werden. „Wenn man auf einem Hyperboloïd ein Sechseck beschreibt, so schneiden sich die Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, in einem Puncte, die Ebenen der ungeraden Winkel des Sechsecks in einem zweiten, und die Ebenen der geraden Winkel in einem dritten Puncte. Diese drei Puncte liegen in einer geraden Linie. Ferner schneiden sich die Ebenen zweier gegenüberliegenden Winkel des Sechsecks und die Ebene, welche durch die Seiten der übrigen Winkel geht, in einem Puncte, welcher auf der reciproken Polare der genannten geraden Linie liegt.

Königsberg am 8ten Juni 1842.

6.

De Aequilibrii formis Ellipsoidicis.

(Auctore *C. O. Meyer*, muneris Schol. Cand., vet. Semin. Phys.-Math. Regiom. sodali.)

---

§. 1.

Jam diu notum erat massam fluidam homogeneam, forma gaudentem corporis Sphaeroidici revolutione Ellipsis circa axem minorem geniti et cujus elementa lege gravitatis *Neutoniana* mutuo attrahuntur, in aequilibrio permanere posse, si circa principalem axem minorem certa quadam celeritate uniformi rotetur. Constabat porro unam eandemque celeritatem rotatoriam respondere binis Sphaeroidis omnesque has celeritates certo limiti inferiores esse debere pro quo utraque Sphaeroida inter se aequalis evadat.

Sed nuper admodum cl. *Jacobi* docuit etiam Ellipsoidam cum tribus axibus inaequalibus figuram aequilibrii esse posse; axem Ellipsoidae minimum fieri axem rotationis et Ellipsi principali ad hanc axem perpendiculari pro libitu sumta, tertium axem et celeritatem rotationis semper reales inveniri. Quod eo majoris momenti videtur inventum quod ea tenus non constitit an nulla exstare possit figura aequilibrii quae non sit revolutione genita. Quin adeo ill. *Legendre* rigorose demonstraverat figuram aequilibrii nisi valdes a formas sphaerica recedat necessario esse Sphaeroidam revolutione Ellipsis circa axem ejus minorem genitum. Et sane *Jacobianae* Ellipsoidae uti autor adnotavit, unus certe axis a reliquis ita differt ut Ellipsoida a forma Sphaerica valde abhorreat.

Quemadmodum datae velocitati rotatoriae respondent binae Sphaeroidae revolutione genitae ita quaeri etiam potest an ex Ellipsoidis illis tribus axibus in aequalibus praeditis datae velocitati rotatoriae una tantum pluresve respondeant. In qua questione nuper minus feliciter versatus est ill. *Ivory*. (V. Phil. Transac. ad a. 1838. P. I.) Posito enim

$$V=\int_0^1\frac{x^2(1-x^2)(1-p^2x^2)\,dx}{((1+p^2x^2)^2+\tau^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ubi $p>1$, putabat vir ill. cum $\frac{\partial V}{\partial(\tau^2)}$ tum $\frac{\partial V}{\partial p}$ valores semper induere negativos, quamquam propter factorem $1-p^2x^2$ in intervallo integrationis a

positivo ad negativum transeuntem, de hac re nonnisi post examen accuratum judicare debuisset. Quin etiam cl. *Liouville* demonstravit, pro iis quidem ipsarum p et τ valoribus quorum in hac quaestione usus est, semper $\frac{\partial V}{\partial(\tau^2)}$ fieri positivum (cf. *Liouville* Journal d. Math. Vol. IV. pg. 169 etc.). Unde cl. *Liouville* deduxit propositionem, si detur axis minimus Ellipsoidae propositae atque differentia excentricitatum duarum sectionum principalium per axem minimum ductarum, ipsam Ellipsoidam prorsus determinatam esse, scilicet aequationem transcendentem, a qua determinatio duorum reliquorum axium pendet, unica radice gaudere reali. Ipsum autem problema de determinando numero Ellipsoidarum datae velocitati rotatoriae respondentium quum cl. *Liouville* non attigisset, cl. *Jacobi* idem mihi proposuit in cujus solutione tentanda vires meas exercerem. Simul cl. *Jacobi* mihi proposuit problema ipsas binas aequationes transcendentas simultaneas, a quibus tota haec quaestio pendet, ope serierum infinitarum elegantissimarum resolvendi, in quas ipse et ill. *Abel* functiones ellipticas evolverunt. Hanc resolutionem quae luculentam theoriae functionum ellipticarum applicationem praebuit, alio loco tradam. In hac Commentatione solam illam de numero Ellipsoidarum quaestionem absolvere studebo.

§. 2.

Si fluidum circa axem fixum uniformi celeritate rotatur, ill. *Lagrange* demonstravit, superficiem fluidi, ut in statu aequilibrii permaneat, satisfacere debere aequationi:

$$X\partial x + Y\partial y + Z\partial z + v^2(x\partial x + y\partial y) = 0.$$

Qua in aequatione significant x, y, z Coordinatas rectangulares cujuscunque puncti superficiei, axis z axem rotationis, X, Y, Z Componentes virium quae punctum (x, y, z) sollicitant secundum directiones axibus Coordinatarum x, y, z parallelas, v constantem celeritatem angularem.

In sequentibus quaestionem generalem ita restringamus, ut ponatur:

1. Fluidum esse homogeneum,
2. Componentes X, Y, Z inde provenire, quod Molecula, cujus Coordinatae x, y, z sunt, ab omnibus fluidi Moleculis lege gravitatis *Neutoniana* attrahantur.

Quaestione sic circumscripta, ill. *Jacobi* docuit Ellipsoidam, tribus axibus in aequalibus praeditam, formam aequilibrii esse posse. Quod ut

probemus inquiramus in illum casum, quo quantitates X, Y, Z ex attractione corporis Ellipsoidici oriuntur.

Ponamus axes Coordinatarum ipsos esse axes principales Ellipsoidae; Molecula superficiei viribus X, Y, Z sollicitata Coordinatas habeat x, y, z; quaecunque alia Molecula corporis Ellipsoidici habeat Coordinatas x', y', z', Massam $dm = \varrho\, d\omega$, ϱ et $d\omega$ designantibus ejus densitatem et volumen; denique f designet vim attractivam pro unitati distantiae et massae. His positis, vis qua Molecula (x, y, z) ad Moleculam (x, y, z) trahitur fit,

$$F' = \frac{f\varrho\, d\omega}{u'^2},$$

brevitatis causa posito:

$$u' = \sqrt{((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)},$$

ubi radicem quadraticam semper positivam summas. Componentes ipsius F', axibus Coordinatarum respective parallelae, fiunt

$$\frac{F'(x'-x)}{u'}, \quad \frac{F'(y'-y)}{u'}, \quad \frac{F'(z'-z)}{u'},$$

unde

$$X = f\varrho \iiint \frac{x'-x}{u'^3}\, d\omega,$$

$$Y = f\varrho \iiint \frac{y'-y}{u'^3}\, d\omega,$$

$$Z = f\varrho \iiint \frac{z'-z}{u'^3}\, d\omega.$$

Integratio omnes Moleculas corporis Ellipsoidici amplecti debet

Designetur per $d\varpi$ elementum superficiei sphaericae, cujus centrum locum (x, y, z) occupat et cujus radius $= 1$; sint porro g, h, k anguli quos u' cum axibus Coordinatarum format, fit:

$$d\omega = u'^2 du'\, d\varpi,$$

$$\cos g = \frac{x'-x}{u'}, \quad \cos h = \frac{y'-y}{u'}, \quad \cos k = \frac{z'-z}{u'},$$

et Componentes X, Y, Z evadunt:

$$X = f\varrho . \iiint \cos g \,.\, du' \,.\, d\omega,$$

$$Y = f\varrho . \iiint \cos h \,.\, du' \,.\, d\omega,$$

$$Z = f\varrho . \iiint \cos k \,.\, du' \,.\, d\omega.$$

Integratio ipsius u' respectu ab $u' = 0$ usque ad $u' = r$ extendi debet, ubi r est radius vector a puncto superficiei (x, y, z) ad alterum punctum superficiei ductus, qui cum axibus Coordinatarum angulos g, h, k format.

Sit

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1,$$

aequatio superficiei Ellipsoidicae, designantibus $2a$, $2b$, $2c$ axes ejus principales. Quae aequatio, substitutione facta:

$$x'=x+r\cos g,\quad y'=y+r\cos h,\quad z'=z+r\cos k,$$

abit in

$$pr^2+2qr=0,$$

posito

$$\frac{\cos^2 g}{a^2}+\frac{\cos^2 h}{b^2}+\frac{\cos^2 k}{c^2}=p,$$

$$\frac{x.\cos g}{a^2}+\frac{y.\cos h}{b^2}+\frac{z.\cos k}{c^2}=q.$$

Hinc ipsius r fluunt duo valores, quorum alter, $r=-\frac{2q}{p}$, limitem superiorem integrationis, alter, $r=0$, inferiorem constituit. Si integratio ipsius x' respectu inter hos limites transigitur fit:

$$X=-2f\varrho\iint\frac{q}{p}\cos g\,d\varpi.$$

In expressione antecedente integrationem extendere debemus ad superficiem hemisphaerae abscissae per planum in puncto (x, y, z) Ellipsoidam tangens. Elemento superficiei hujus hemisphaerae $d\varpi$ respondet in altera hemisphaera alterum elementum in eadem sphaerae diametro positum, pro quo omnes tres quantitates $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$ simul valores oppositas induunt. Jam vero quum expressio sub signo integrationis valorem non mutet tribuendo ipsis $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$ simul omnibus valores oppositos, patet eundem prodire valorem si integrationem ad totam superficiem sphaericam extendas, divisione simul per 2 facta, sive erit:

$$X=-f\varrho\iint\frac{q}{p}\cos g\,d\varpi,$$

$$=-f\varrho\left[\frac{x}{a^2}\iint\frac{\cos^2 g}{p}d\varpi+\frac{y}{b^2}\iint\frac{\cos g.\cos h}{p}d\varpi+\frac{z}{c^2}\iint\frac{\cos g.\cos k}{p}d\varpi\right],$$

integratione ad totam superficiem sphaericam extensa. Facile patet integralia,

$$\iint\frac{\cos g.\cos h}{p}d\varpi,\quad \iint\frac{\cos g.\cos k}{p}d\varpi,$$

per se evanescere; bini enim valores expressionum $\frac{\cos g.\cos h}{p}$ et $\frac{\cos g.\cos k}{p}$, in quibus $\cos g$ idem manet, $\cos h$ et $\cos k$ autem valores oppositas induunt mutuo destruuntur. Unde manat

$$X=-f\varrho\frac{x}{a^2}\iint\frac{\cos^2 g}{p}d\varpi.$$

Quantitas $\frac{\cos^2 g}{p}$ non mutatur si quantitatem $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$ una pluresve valores oppositos induunt, unde licet integrale antecedens ad solos positivos valores ipsorum $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$ sive ad octantem sphaerae extendere, multiplicatione simul per 8 facta. Ponendo igitur $\cos h = \sin g . \cos\psi$ et $\cos k = \sin g . \sin\psi$, unde

$$d\varpi = \sin g\, dg\, d\psi,$$

obtinetur et substituendo ipsius p valorem erit,

$$X = -8f\varrho x b^2 c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 g \sin g\, dg\, d\psi}{c^2(b^2\cos^2 g + a^2\sin^2 g)\cos^2\psi + b^2(c^2\cos^2 g + a^2\sin^2 g)\sin^2\psi},$$

unde integratione secundum ψ facta,

$$X = -4f\varrho\pi x \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{bc\cos^2 g \sin g\, dg}{\sqrt{((b^2\cos^2 g + a^2\sin^2 g)(c^2\cos^2 g + a^2\sin^2 g))}}.$$

Quae expressio substitutione facta, $u = a^2 \tang^2 g$, et posito

$$E = f\varrho\pi, \quad R' = \sqrt{\left[\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)\left(1+\frac{u}{c^2}\right)\right]}$$

haec evadit

$$X = -2\varepsilon\frac{x}{a^2}\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)R'}.$$

In qua expressione ipsis a, b, c, x, y, z rite inter se commutatis, statim eruis:

$$Y = -\frac{2\varepsilon y}{b^2}\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R'}, \qquad Z = -\frac{2\varepsilon z}{c^2}\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R'},$$

unde ponendo:

$$A = \int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)R'}, \quad B = \int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R'}, \quad C = \int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R'},$$

fit:

$$X = -\frac{2\varepsilon x}{a^2}A, \quad Y = -\frac{2\varepsilon y}{b^2}B, \quad Z = -\frac{2\varepsilon z}{c^2}C.$$

Jam revertamur ad illam aequationem initio prolatam:

$$X\partial x + Y\partial y + Z\partial z + v^2(x\partial x + y\partial y) = 0,$$

quae abit in:

$$1. \quad -\frac{2\varepsilon x}{a^2}A\partial x - \frac{2\varepsilon y}{b^2}B\partial y - \frac{2\varepsilon z}{c^2}C\partial z + v^2(x\partial x + y\partial y) = 0.$$

Aequatione Ellipsoidae,

$$2. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

variata fit:

$$\frac{2x}{a^2}\partial x+\frac{2y}{b^2}\partial y+\frac{2z}{c^2}\partial z = 0,$$

cujus aequationis ope eliminata $\frac{2z}{c^2}\partial z$ ex aequat. (1.) obtinemus:

$$x\partial x\left[v^2-\frac{2\varepsilon}{a^2}(A-C)\right]+y\partial y\left[v^2-\frac{2\varepsilon}{b^2}(B-C)\right] = 0.$$

Cui aequationi, quum ∂x et ∂y alterum ex altero non pendeat, non satisfacies nisi posueris:

$$v^2 = \frac{2\varepsilon}{a^2}(A-C) = \frac{2\varepsilon}{b^2}(B-C),$$

unde:

$$(b^2-a^2)C = b^2A-a^2B.$$

Ipsorum A, B, C valoribus substitutis et posito

$$\frac{v^2}{2\varepsilon} = \frac{v^2}{2f\varrho\pi} = V,$$

eruitur e formulis antecedentibus:

$$4.\quad V=\frac{a^2-c^2}{a^4c^2}\int_0^\infty\frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R'} = \frac{b^2-c^2}{b^4c^2}\int_0^\infty\frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R'},$$

$$5.\quad (b^2-a^2)\left\{\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R'}-\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)\left(1+\frac{u}{a^2}\right)R'}\right\} = 0.$$

Ipso intuitu patet ex aequatione (4.), cum V natura sua sit positivum, fieri debere $a>c$, $b>c$, sive pro axe rotationis sumendum esse minimum e tribus axibus Ellipsoidae. Aequationes (4.) et (5.) loco $\frac{u}{c^2}$, $\frac{a^2}{c^2}$, $\frac{b^2}{c^2}$ ponendo u, α^2, β^2, abeunt in

$$6.\quad V = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^4}\int_0^\infty\frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)(1+u)R} = \frac{\beta^2-1}{\beta^4}\int_0^\infty\frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{\beta^2}\right)(1+u)R},$$

$$7.\quad (\beta^2-\alpha^2)\left\{\int_0^\infty\frac{du}{(1+u)R}-\int_0^\infty\frac{du}{\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{u}{\beta^2}\right)R}\right\},$$

ubi positum est

$$R = \sqrt{\left[\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{u}{\beta^2}\right)(1+u)\right]}.$$

Hinc sequitur has aequationes tres tantum involvere variabiles V, α, β vel si vis unum axium $= 1$ poni posse. Quo facto erunt axes Ellipsoidae 1 α, β, ubi per 1 axis rotationis significatur.

§. 3.

Aequationi (7.) satisfit ponendo $\alpha = \beta$, quo facto ex aequatione (6.) quae formam induit,

$$8. \quad V = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^4}\int_0^\infty \frac{u\,du}{\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)^2(1+u)^{\frac{3}{2}}}$$

V determinatur per solum α. Vice versa quaerendum est an dato ipsius V valori unus pluresve respondeant valores reales ipsius α.

Ponendo $\alpha\alpha = 1+\gamma\gamma$ ex aequatione (8.) sequitur

$$V = \gamma^2\int_0^\infty \frac{u\,du}{(\gamma^2+1+u)^2(1+u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Qua formula per regulas notas integrata obtinetur

$$V = \frac{(3+\gamma^2)\operatorname{arc\,tang}\gamma - 3\gamma}{\gamma^3},$$

unde

$$9. \quad \frac{3\gamma+V\gamma^3}{3+\gamma^2} - \operatorname{arc\,tang}\gamma = 0.$$

Posito

$$\frac{3\gamma+V\gamma^3}{3+\gamma} - \operatorname{arc\,tang}p = \beta$$

sint γ et β Coordinatae punctorum curvae, quae axem Abscissarum in centro systematis Coordinatarum secabit. Attamen valor $\gamma = 0$ quaestioni alienus est, nisi $V = 0$ ponatur. Quum aequatio (9.) per γ divisa tantum quadrata ipsius γ contineat ceteri valores γ bini aequales signique oppositi sunt; sufficit igitur valores positivos considerare. Pro valoribus ipsius γ infinite parvis fit $\beta = \frac{Vp^3}{\beta}$, unde Ordinatae pro Abscissis positivis infinite parvis et ipsae fiunt positivae. Pro Abscissa γ positiva infinite magna fit Ordinata et ipsa infinite magna positiva. Sed ut cognoscatur an Ordinatae etiam negativae fieri possint ideoque curva axem Abscissarum in aliis quoque punctis praeter initium Coordinatarum secet, Maxima et Minima Ordinatae β inveniantur. Eum in finem ponimus $\frac{d\beta}{d\gamma} = 0$, unde sequitur

$$10. \quad V\gamma^4 + 2(5V-2)\gamma^2 + 9V = 0.$$

Quum haec aequatio ipsius γ^2 respectu quadratica sit, sequitur unum Maximum et unum Minimum in parte positiva Abscissarum exstare, unde concluditur, ut curva axem positivum Abscissarum tantum in duobus punctis secare possit, sive ut aequatio (9.) ad summum duos valores positivos non evanescentes ipsius γ praebeat.

Sit p radix aequationis (10.), erit altera radix $\frac{3}{p}$, unde altera radix ipso $\sqrt{3}$ minor, altera major erit. Valor ipsius V, qui ex aequatione (10.) sequitur,

$$V = \frac{2pp}{(1+pp)(9+pp)} = \frac{2pp}{9+10pp+p^4},$$

continuo crescit si p inde a 0 usque ad $\sqrt{3}$ crescit aut inde a ∞ usque ad $\sqrt{3}$ decrescit. Fit enim

$$\frac{dV}{2d.p^2} = \frac{9-p^4}{(9+10pp+p^4)^2},$$

quae est quantitas positiva aut negativa prout $p^2 < 3$ aut > 3. Ipsi $p = \sqrt{3}$ respondet valor ipsius $V = \frac{1}{8}$. Unde si $V > \frac{1}{8}$, nullus extat ipsius p valor realis sive nullum datur Ordinatae Maximum Minimumve sed Ordinatae inde a 0 usque ad ∞ continuo crescunt. Crescente V inde a 0 usque ad $\frac{1}{8}$, alter ipsius p valor sive Abscissa Ordinatae Maximae inde a 0 usque ad $\sqrt{3}$ crescit, alter ipsius p valor sive Abscissa Ordinatae Minimae inde a ∞ usque ad $\sqrt{3}$ decrescit. Si $V = \frac{1}{8}$ sive $p = \sqrt{3}$, Ordinatae Maxima et Minima coindicunt sive gaudet curva puncto inflexionis. Valor Ordinatae Maximae vel Minimae evadit substituendo ipsius V expressionem per Abscissam p exhibitam

$$\beta = M = \frac{p(7pp+9)}{(1+pp)(9+pp)} - \text{arc tang}\, p,$$

$$= \frac{p}{4}\left[\frac{1}{1+pp} + \frac{27}{9+pp}\right] - \text{arc tang}\, p.$$

Unde fit

$$\frac{dM}{dp} = -\frac{p}{4}\left[\frac{pp-1}{(1+pp)^2} + \frac{27(pp-9)}{(9+pp)^2}\right] - \frac{1}{1+pp}.$$

Cum Abscissa Ordinatae Minimae sit $> \sqrt{3}$, sequitur ex hac formula, crescente Abscissa Ordinatae Minimae inde a $\sqrt{3}$ usque ad ∞, ipsam Ordinatam Minimam M continuo decrescere (idque ad valorem usque $M = -\frac{1}{2}\pi$, valori $p = \infty$ respondentem). Resolvendo aequationem $M = 0$ invenimus

$$p \doteq 2{,}5293,$$

cui respondet ipsius V valor

$$V' = 0{,}2246.$$

Unde sequitur ex antecedentibus, pro minore ipsius p sive majore ipsius V valore fieri M positivam, ideoque curvam non secare axem Abscissarum sive aequationem (9.) radicibus realibus destitutam esse. Contra sequitur, pro minoribus ipsius V valoribus Ordinatam Minimam M fieri negativam

ideoque axem positivum Abscissarum praeter initium Coordinatarum adhuc in duobus punctis a curva secari, sive aequationem (9.) praeter radicem $\gamma = 0$ adhuc duabus gaudere radicibus positivis. Quibus cum totidem respondeant Ellipsoidae revolutione genitae, quarum semiaxis rotationis $= 1$, radius Aequatoris $= \sqrt{(1+\gamma\gamma)}$, sequitur, *pro valoribus ipsius* $V < 0{,}2246$ *semper duas existere Ellipsoidas revolutione genitas, pro valoribus ipsius* $V > 0{,}2246$ *Ellipsoidam revolutione genitam figuram aequilibrii esse non posse.* Si $V = 0{,}2246$, Ordinata Minima evanescit, unde in puncto cujus Abscissa $p = 2{,}5293$ curva axem Abscissarum tangit sive duae radices aequationis (9.) coincidunt. Unde etiam si $V = 0{,}2246$, duae Ellipsoidae revolutione genitae in unam eandemque redeunt, cujus semiaxis rotationis $= 1$, axis aequationis $= \sqrt{(1+pp)}$, ubi $p = 2{,}5293$. Quae omnia olim ill. *d'Alembert* demonstravit.

Cum p induere possit valores omnes inde a 0 usque ad ∞, sequitur Sphaeroidas ellipticas, quae figurae aequilibrii sunt, quacunque excentricitate praeditas esse posse. Dividuntur autem Sphaeroidae illae omnes in duas classes ad easdem velocitates rotatorias pertinentes, quarum altera amplectitur Sphaeroidas in quibus, axe rotationis sive axe minore Meridiani $= 1$ posito, fit excentricitas $p < 2{,}5293$, altera Sphaeroidas amplectitur quarum excentricitas $p > 2{,}5293$. Alterius classis excentricitates crescunt, alterius decrescunt si velocitas rotationis inde a 0 usque ad limitem V' crescit.

§. 4.

Quaeritur an aequationibus (6.) et (7.) satisfieri possit, etiamsi non habeatur $\alpha = \beta$. Posito $\frac{1}{\alpha^2} = t$ et $\frac{1}{\beta^2} = s$, statim eruitur ex (7.), divisione per $\beta^2 - \alpha^2$ facta:

$$11. \quad F = (1-s-t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{R^3} = 0,$$

quae aequatio etiam hanc formam induit:

$$12. \quad F = (1-s)(1-t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0 \frac{u\,du}{(1+su)(1+tu)R} = 0.$$

Ex aequatione (16) sequitur

$$V = t(1-t)\int_0^\infty \frac{u(1+su)}{R^3}\,du = s(1-s)\int_0^\infty \frac{u(1+tu)}{R^3}\,du,$$

sive ex (11.) vel (12.):

$$13. \quad V = s.t\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+su)(1+tu)R} = (1-s)(1-t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3}.$$

Ex aequatione (11.) statim colligis fieri $1 > s+t$, sicuti cl. *Jacobi* adnotavit, unde $s<1$ et $t<1$. Loco s posito certo valore inter 0 et 1, sequitur ex aequatione (12.), pro $t=0$ ipsum F positivum, pro $t=1-s$ ipsum F negativum evadere. Unde quum F ipsorum s et t continua functio sit, concluditur exstare pro quocunque s inter 0 et 1 certe unum valorem ipsius t inter eosdem limites, qui $F=0$ reddat. Ex aequationibus (13.) sequitur fieri non posse $V=0$ nisi s et t alterum evanescat alterum unitati aequale evadat.

Aggredior jam quaestionem an dato ipsius V valore e duabus aequationibus inter s et t inventis erui possint unum pluresve systemata valorum realium harum quantitatum, sive an datae velocitati rotatoriae una pluresve respondeant Ellipsoidae tribus axibus inaequalibus praeditae quae figurae aequilibrii sint. Ponamus $s>t$, unde quum sit $s+t<1$, sequitur $t<\frac{1}{2}$. Jam demonstrabo, si et t et V pro functione ipsius s habemus, „*crescente s, et t et V simul decrescere.*"

Duas aequationes inter tres quantitates s, t, V inventas hac forma exhibeamus,

$$V = s.t\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+su)(1+tu)},$$

$$F = (1-s-t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+su)(1+tu)R} = 0.$$

Fiunt ipsorum V et F differentialia partialia, ipsorum s et t respectu sumta si differentialia partialia uncis includuntur e more *Euleriano*:

$$\left(\frac{dF}{ds}\right) = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u(1+u)(1+tu)}{R^5}[2+(3-s-t)u-stu^2]\,du,$$

$$\left(\frac{dV}{ds}\right) = t\int_0^\infty \frac{u(1+u)^2(1+tu)}{R^5}[1-\tfrac{1}{2}su]\,du,$$

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u(1+u)(1+su)}{R^5}[2+(3-s-t)u-stu^2]\,du,$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = s\int_0^\infty \frac{u(1+u)^2(1+su)}{R^5}[1-\tfrac{1}{2}tu]\,du.$$

Quarum formularum duae postremae e duabus prioribus deduci possunt ipsa s et t inter se commutando. Ponamus

$$2A^0 = \int_0^\infty \frac{u(1+u)}{R^5}[2+(3-s-t)u-stu^2]\,du,$$

$$2A' = \int_0^\infty \frac{u^2(1+u)}{R^5}[2+(3-s-t)u-stu^2]\,du,$$

$$B^0 = \int_0^\infty \frac{u(1+u)^2}{R^5}\,[1-\tfrac{1}{2}stu^2]\,du,$$

$$B' = \int_0^\infty \frac{u^2(1+u)^2}{R^5}\,du,$$

quae quantitates permutando s et t non mutantur; fit

$$\left(\frac{dF}{ds}\right) = -A^0 - tA',$$

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) = -A^0 - sA',$$

$$\left(\frac{dV}{ds}\right) = tB^0 + t(t-\tfrac{1}{2}s)B',$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = sB^0 + s(s-\tfrac{1}{2}t)B'.$$

Praemittam propositiones quasdam de signo et magnitudine integralium A^0, A', B^0, B', quarum in sequentibus usus erit. Aequatio

$$\frac{u^2}{R(1+su)(1+tu)} = \frac{u^2}{(1+u)^{\frac{1}{2}}(1+su)^{\frac{3}{2}}(1+tu)^{\frac{3}{2}}},$$

secundum u differentiata dat:

$$d\left[\frac{u^2}{R(1+su)(1+tu)}\right] = \frac{4u+4(s+t)u^2-2stu^3-3stu^4}{R^3(1+su)(1+tu)}\,du,$$

quae aequatio inter limites 0 et ∞ integrata abit in

$$14.\qquad 0 = \int_0^\infty \frac{u(1+u)}{R^5}\,[4+4(s+t)u-2stu^2-3stu^3]\,du.$$

Quam aequationem detrahendo de valore ipsius $4B^0$,

$$\int_0^\infty \frac{u(1+u)}{R^5}\,[4+4u-2stu^2-2stu^3]\,du = 4B^0,$$

sequitur:

$$4B^0 = \int_0^\infty \frac{u^2(1+u)}{R^5}\,[4(1-s-t)+stu^2]\,du.$$

Aequationem (14.) divisam per -2, si addis quantitati $2A^0$ reperis:

$$2A^0 = 3\int_0^\infty \frac{u(1+u)}{R^5}\,[(1-s-t)u+\tfrac{3}{2}stu^3]\,du.$$

Denique invenis:

$$2A^0+2A' = \int_0^\infty \frac{u(1+u)}{R^5}\,[2+(5-s-t)u+(3-s-t-st)u^2-stu^3]\,du,$$

unde, addita aequatione (14.) divisa per -3, fluit:

$$2A^0+2A' = \int_0^\infty \frac{u(1+u)}{R^5}\,[\tfrac{2}{3}+(5-\tfrac{7}{3}(s+t))u+(3-s-t-\tfrac{1}{3}st\,u^2]\,du.$$

Quum sit $s+t<1$, $st=\frac{1}{4}(s+t)^2-\frac{1}{4}(s-t)^2<\frac{1}{4}$, videmus *quantitates*

B^0, A^0 et A^0+A' positivas evadere. Quantitatem B' esse positivam ipso intuitu patet.

His praeparatis, quum sit:

$$\left(\frac{dF}{ds}\right) = -A^0 - tA' = -(1-t)\,A^0 - t(A^0+A'),$$
$$\left(\frac{dF}{dt}\right) = -A^0 - sA' = -(1-s)\,A - s(A^0+A'),$$

sequitur *differentialia partialia* $\left(\frac{dF}{ds}\right)$ et $\left(\frac{dF}{dt}\right)$ *semper valores induere negativos.* Itaque quum ex aequatione $F=0$ differentiata prodeat:

$$dt = -\frac{\left(\frac{dF}{ds}\right)}{\left(\frac{dF}{dt}\right)}\,ds,$$

sequitur ds et dt oppositis signis gaudere, sive *quantitate s crescente, quantitatem t decrescere.* Q. d. e.

Quantitate V differentiata obtinemus:

$$dV = \left[\left(\frac{dV}{ds}\right) + \left(\frac{dV}{dt}\right)\frac{dt}{ds}\right] ds = \frac{\left(\frac{dV}{ds}\right)\left(\frac{dF}{dt}\right) - \left(\frac{dV}{dt}\right)\left(\frac{dF}{ds}\right)}{\left(\frac{dF}{dt}\right)}\,ds;$$

adhuc inquirendum erit in signum quantitatis:

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)\left(\frac{dF}{dt}\right) - \left(\frac{dV}{dt}\right)\left(\frac{dF}{ds}\right).$$

Substitutis differentialium partialium $\left(\frac{dV}{ds}\right)$, $\left(\frac{dV}{dt}\right)$, $\left(\frac{dF}{ds}\right)$, $\left(\frac{dF}{dt}\right)$ expressionibus per A^0, A', B^0, B' supra exhibitis, fit

$$+\left(\frac{dV}{ds}\right)\left(\frac{dF}{dt}\right) = -\,tA^0B^0 - t(t-\tfrac{1}{2}s)\,A^0B' - st\,A'B^0 - st(t-\tfrac{1}{2}s)\,A'B',$$
$$-\left(\frac{dV}{dt}\right)\left(\frac{dF}{ds}\right) = +\,sA^0B^0 + s(s-\tfrac{1}{2}t)\,A^0B' + stA'B^0 + st(s-\tfrac{1}{2}t)\,A'B',$$

unde:

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)\left(\frac{dF}{dt}\right) - \left(\frac{dV}{dt}\right)\left(\frac{dF}{ds}\right) =$$
$$(s-t)\,[A^0B^0 + (s+t)\,A^0B' + \tfrac{3}{2}st.A'B'] =$$
$$(s-t)\,[A^0B^0 + \tfrac{3}{2}st.B'(A^0+A') + (s+t-\tfrac{3}{2}st)\,A^0B'].$$

Quum sit $s+t-\tfrac{3}{2}st = s(1-\tfrac{3}{4}t)+t(1-\tfrac{3}{4}s)$ quantitas positiva, nec non quantitates A^0, A^0+A', B^0, B' positivae sint, sequitur ex aequatione praecedente, *quantitatem,*

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)\left(\frac{dF}{dt}\right)-\left(\frac{dV}{dt}\right)\left(\frac{dF}{dt}\right),$$

semper positivam esse. Inde quum $\left(\frac{dF}{dt}\right)$ valore negativo gaudeat, sequitur, esse $\left(\frac{dV}{ds}\right)$ *quantitatem negativam*, sive *crescente quantitate s, quantitatem V decrescere.* Q. d. e.

Antecedentibus inventa sic etiam proponi possunt, *crescente V et s decrescere et t crescere,* unde sequitur: *„cuicunque celeritati rotationis unam tantum respondere posse Ellipsoidam tribus axibus inaequalibus affectum."*

Porro quum sit $s=\frac{1}{\beta^2}$, $t=\frac{1}{\alpha^2}$ sequitur, si Aequatorem dicimus Ellipsin principalem axi rotationis perpendicularem, *„crescente V sive celeritate rotationis axem Aequatoris majorem* 2α *decrescere, minorem* 2β *crescere."*

His addam dilucidationes sequentes. Supposui antecedentibus $s>t$; sed propositio inventa, crescente s decrescere t et vice versa, ab illa suppositione non pendet, sicuti patet ex valoribus differentialium partialium $\left(\frac{dF}{ds}\right)$ et $\left(\frac{dF}{dt}\right)$ supra assignatis. Missum igitur facta suppositione $s>t$, sequitur ex aequatione (12.), ut jam antea adnotavimus, ubi $s=0$ fieri $t=1$, ubi $s=1$ fieri $t=0$. Unde quum altera quantitate continuo crescente altera continuo decrescat, patet, crescente s inde a 0 usque ad 1, decrescere t inde ab 1 usque ad 0. In quo igitur transitu ab altero limite ad alterum eveniet idque semel tantum ut utraque quantitas eundam induat valorem, $s=t=\tau$. Ultra quem valorem si crescit s, ipsa t inde ab hoc valore decrescit et vice versa, ita ut si habetur $s=s^0$, $t=t^0$ ubi $s^0<\tau$, $t^0>\tau$, ipsa s ulterius crescendo atque t decrescendo simul perveniant ad valores $s=t^0$, $t=s^0$. Id quod jam eo patet quod aequatio $F=0$ permutando s et t non mutatur. Utraque positio $s=s^0$, $t=t^0$ atque $s=t^0$, $t=s^0$ eandem suppeditat Ellipsoidam, unde tantum opus erat ut eorum valorum ratio haberetur pro quibus $s>t$.

Aliter se habet propositio, crescente s decrescere V, quippe quae pendet a suppositione esse $s-t$ positivum. Sequitur enim ex antecedentibus, crescente s decrescere V aut crescere prout $s-t$ positivo aut negativo valore gaudeat. Unde crescit V decrescente s inde ab 1 usque τ.

deinde vero ipsa s ulterius decrescente inde a τ usque ad 0, ipsa V rursus decrescit. Qua de re summum ipsa V attingit valorem si $s = t$. Quem ipsius V valorem maximum ipsi $s = t = \tau$ respondentem appellabo V^0. Quum permutando s et t ipsa V non mutetur, sequitur positiones $s = t^0$, $t = s^0$ et $s = s^0$, $t = t^0$ eindem ipsius V valori respondere. Utraque autem positio eandem suppeditat Ellipsoidam, unde dato ipsius V valori $< V^0$, semper una et unica tantum respondet Ellipsoida. Ponendo $t = 0$ et $s = 1$, quum evanescat V, sequitur ex antecedentibus: „*Crescente V a 0 ad V^0, et t a 0 ad τ, crescere et s ab 1 ad τ decrescere, sive axem majorem Aequatoris ab infinito usque ad $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ decrescere, axem minorem ab unitate usque ad eandem quantitatem $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ crescere.*" Axem rotationis semper $= 1$ sumsimus.

Jam quantitatum τ et V^0 valores numericos indagemus, quorum computationem jam ill. *Ivory* in Commentatione citata fecit. Dividendo per $\beta^2 - \alpha^2$ ac deinde ponendo $\beta = \alpha$, eruimus e (7.) et (13.):

$$0 = \int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)^2 (1+u)^{\frac{1}{2}}} - \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)},$$

$$V^0 = \frac{1}{\alpha^4}\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{\alpha^2}\right)^3}.$$

Posito $\alpha^2 = 1 + \lambda^2$ et $u = \frac{1-x^2}{x^2}$, aequationes praecedentes abeunt in sequentes:

$$0 = \int_0^1 \frac{x^2.dx}{1+\lambda^2 x^2} - (1+\lambda^2)^2 \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1+\lambda^2 x^2)^2},$$

$$V^0 = 2(1+\lambda^2)\int_0^1 \frac{(1-x^2)x^2 dx}{(1+\lambda^2 x^2)^3}.$$

Integrationibus per methodos notas transactis eruitur:

$$0 = -\lambda(3+13\lambda^2) + (3+14\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arc tang}\lambda,$$

$$V^0 = \frac{\lambda(3+\lambda^2) - (3-\lambda^2)(1+\lambda^2)\operatorname{arc tang}\lambda}{4\lambda^5}.$$

Rejecta radice $\lambda = 0$ quaestioni aliena, ex aequationibus antecedentibus fluunt valores approximati

$\lambda = 1{,}3946$, $V^0 = 0{,}18711$, $\alpha = \beta = \sqrt{(1+\lambda^2)} = 1{,}7161$,
unde etiam

$$\tau = \frac{1}{\alpha^2} = 0{,}3395.$$

Cum quaestio ill. *d'Alembert* omnes amplectatur Ellipsoidas revolutione genitas quae figurae aequilibrii esse possint, sequitur etiam antecedentibus determinatam celeritati V^0 respondentem iis contineri. Ac revera si aequationum duarum praecedentium priorem per $4\lambda^5$ divisam valori ipsius V^0 addimus, prodit

$$V^0 = \frac{-3\lambda+(3+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda}{\lambda^3}.$$

quae expressio convenit cum supra tradita §. 3. ponendo $\gamma=\lambda$. Si in aequationem (9.) ponimus $V=V^0$, praeter radicem $\gamma=\lambda$ altera exstat cujus valorem calculavi

$$\gamma = 5{,}0297.$$

Videmus Ellipsoidam nostram, limitem Ellipsoidarum tribus axibus inaequalibus praeditarum, pertinere ad classem Sphaeroidarum quae minoribus excentricitatibus gaudet. (cf. §. 3.)

Comprehensis quae in prioribus exposuimus demonstratum est: „*Si Ellipsoida figura aequilibrii sit, V inter limites* 0 *et* $V'=0{,}2246$ *contineri; crescente V a* 0 *ad* $V^0=0{,}18711$, *cuique V unam Ellipsoidam tribus axibus inaequalibus affectam et duas Ellipsoidas revolutione genitas respondere; si* $V=V^0$ *Ellipsoidam tribus axibus inaequalibus affectam redire in alteram revolutione genitam, minore excentricitate praeditam, denique ultra crescente V ad* $V'=0{,}2246$, *duas tantum Ellipsoidas revolutione genitas haberi, quae pro* $V=V'$ *in eandem redeunt.*"

Si fluidum in quiete est sive circa axem suum non rotatur, fit $V=0$. Posito igitur in aequatione (9.) $V=0$, sequitur

$$0 = \frac{(3+\gamma^2)\operatorname{arc\,tang}\gamma-3\gamma}{\gamma^3},$$

qua ex aequatione prodeunt ipsius γ valores, 0 et ∞; unde cum sit $\alpha=\beta=\sqrt{(1+\gamma^2)}$ sequitur

$$\alpha=\beta=1, \qquad \alpha=\beta=\infty.$$

Aequationes (12.) posito $V=0$ praebent ipsius s et t valores $s=1$ et $t=0$, unde

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{t}}=\infty, \qquad \beta=\frac{1}{\sqrt{s}}=1.$$

Videmus igitur datam fluidi massam circa axem suum non rotantis tres aequilibrii figuras induere posse: 1) sphaeram, 2) discum infinitum circularem infinite tenuem, 3) cylindrum rectum infinitum cum basi circulari infinite parva. Similitudo harum trium formarum servatur si fluidum velocitate rota-

toria uniformi circa axem movetur, saltem pro velocitatibus parvis. Crescente velocitate abeunt sphaera et discus in Ellipsoidas revolutione genitas, quarum illae magis magisque excentricae fiunt, dum harum excentricitas continuo decrescit, usque dum binarum excentricitates inter se aequales evadunt. Cylindrus infinite magnus cum basi circulari abit in Ellipsoidam tribus axibus inaequalibus praeditam, basis circularis abit in ellipsin magis magisque excentricam, cujus axis minor fit axis rotationis, axis major fit axis minor aequatoris; aequatoris excentricitas continuo minuitur usque dum evadit circulus ipsaque Ellipsoida in priorem speciem revolutione genitarum redit.

Ut habeatur exemplum trium illarum figurarum quae sphaerae, disci, cylindri similitudinem referunt, ponamus densitatem fluidi et velocitatem rotatoriam eandem esse atque densitatem mediam et velocitatem rotatoriam *terrae nostrae.* Pro quibus invenitur

$$V = 0{,}0029972.$$

Hoc ipsius V valore substituto, resolutione aequationum (9.) et (10.) invenio, si rursus axis minimus seu rotationis $= 1$ ponitur atque α et β axes principales aequatoris designant,

$$1)\quad \alpha = \beta = 1{,}0043441,$$

$$2)\quad \alpha = \beta = 680{,}\ldots$$

$$3)\quad \alpha = 19{,}57\ldots,\quad \beta = 1{,}018\ldots$$

Figurae corporum systematis nostri solaris tantum ad primam sphaeroidicam speciem accedunt. Observavit autem cl. *Saigey,* stellarum quarundam fixarum vices luminis periodicas formis earum non sphaeroidicis explicari posse.

Regiomonti d. 21. Martis 1842.

7.

Aphorismen aus der Geometrie des Raumes.

(Von Herrn Prof. Dr. *Plücker* in Bonn.)

I. Die Axen der Flächen zweiter Ordnung.

§. 1.

1. Die Absicht dieses Paragraphs ist, auf möglichst einfache Weise eine für Anwendungen wichtige Aufgabe zu behandeln, welche früher schon verschiedene Lösungen gefunden hat: die Aufgabe nemlich, der Lage und Gröfse nach, die Axen der Flächen zweiter Ordnung zu bestimmen, wenn diese Flächen durch ihre allgemeine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben sind. Wir setzen hierbei voraus, dafs die Fläche einen Mittelpunct habe und wollen diesen Mittelpunct zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen. Dann können wir der allgemeinen Gleichung die folgende Form geben:

1. $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = C.$

Wenn C verschwindet, so stellt diese Gleichung insbesondere Kegelflächen dar; abstrahiren wir von diesen, so können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, $C = 1$ nehmen.

2. Wenn wir, nach beliebiger Richtung die Fläche durch parallele Ebenen schneiden, so liegen die Mittelpuncte der Durchschnittscurven in allen diesen Ebenen auf einem Durchmesser der Fläche; und wenn dieser Durchmesser auf den Schnitt-Ebenen senkrecht steht, so ist er eine *Axe* der Fläche. Um die Richtung einer solchen Axe zu finden, brauchen wir also blofs eine, übrigens beliebige Schnitt-Ebene so zu führen, dafs ein vom Mittelpuncte der Fläche auf diese Ebene gefälltes Perpendikel den Mittelpunct der Durchschnittscurve trifft.

Die Gleichung einer solchen Schnitt-Ebene sei

2. $z + by + ax = c;$

die Gleichungen des Perpendikels sind alsdann:

3. $x = az, \quad y = bz.$

Wir wollen die analytischen Bedingungen entwickeln, unter welchen dieses Perpendikel den Mittelpunct der Durchschnittscurve in der Ebene (2.) trifft. Um zuvörderst diesen Mittelpunct zu bestimmen, brauchen wir blofs die Gleichung der Fläche (1.) einmal in Beziehung auf x, das andere Mal in Beziehung auf y zu differentiiren und hierbei, in Folge der Gleichung (2.), z als Function von x und y zu betrachten, so dafs

$$\frac{dz}{dx} = -a, \quad \frac{dz}{dy} = -b.$$

Auf diese Weise ergeben sich unmittelbar die folgenden beiden Gleichungen:

$$(Ax + B''y + B'z) - (B'x + By + A''z)a = 0,$$
$$(B''x + A'y + Bz) - (B'x + By + A''z)b = 0,$$

welche eine gerade Linie darstellen, die die Ebene (2.) in dem gesuchten Mittelpuncte schneidet.*) Mit ihnen *zugleich* müssen also die beiden Gleichungen (3.) bestehen, wenn die bezügliche gerade Linie eine Axe der Fläche sein soll. Eliminiren wir hiernach zwischen diesen vier Gleichungen $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$, so kommt:

$$4. \quad \begin{cases} (Aa + B''b + B') - (B'a + Bb + A'')a = 0, \\ (B''a + A'b + B) - (B'a + Bb + A'')b = 0. \end{cases}$$

Durch diese beiden Gleichungen, welche drei Werthenpaare für b und a geben, sind die Richtungen der drei Axen gegeben. Von diesen Richtungen ist eine offenbar reell, und es ist leicht zu zeigen, dafs die beiden andern es ebenfalls sind. Wenn wir zu diesem Ende annehmen, dafs die notorisch reelle Axenrichtung mit der Axe der z zusammenfalle, so müssen die beiden Gleichungen (4.) befriedigt werden, wenn a und b zugleich verschwinden. Dies fordert $B = 0$ und $B' = 0$. Dann reduciren sich aber gleichzeitig diese beiden Gleichungen auf den ersten Grad; was anzeigt, dafs ein zweites Werthenpaar von a und b unendlich wird (wir erkennen auch unmittelbar, dafs die Gleichungen (4.) befriedigt werden, wenn $\frac{1}{a} = 0$ und $\frac{1}{b} = 0$ ist), und dafs also eine zweite Axe in die Ebene xy fällt. Die auf den ersten

*) Wenn wir zwischen den Gleichungen (1.) und (2.) z eliminiren, so erhalten wir die Projection der Durchschnittscurve auf die Ebene xy. Um das x und y des Mittelpunctes dieser Projection und also auch der Durchschnittscurve selbst zu finden, brauchen wir bekanntlich nur die resultirende Gleichung nach einander in Beziehung auf x und y zu differentiiren. Wir können hierbei auch wie im Texte verfahren und, nach der Differentiation, aus den Gleichungen (4.), vermittelst (2.), z eliminiren.

Grad reducirten Gleichungen (4.) werden aber nur befriedigt, wenn a und b beide unendlich grofs werden, oder wenn beide verschwinden. Die dritte Axe kann hiernach also nur entweder ebenfalls in der Ebene xy liegen, oder mit der Axe der z zusammenfallen. Den letztern Fall können wir sogleich, als unstatthaft, ausschliefsen. Um hiernach die Richtung der beiden in der Ebene xy liegenden Axen zu bestimmen, brauchen wir nur aus den beiden Gleichungen (4.) die folgende abzuleiten:

$$(Aa+B''b+B')b-(B''a+A'b+B)a = 0,$$

welche durch das Verschwinden von B und B' auf die Gleichung

$$5.\quad B''\left(\frac{b}{a}\right)^2-(A'-A)\frac{b}{a}-B'' = 0$$

sich reducirt und anzeigt, dafs diese beiden Axen reell sind und auf einander senkrecht stehen.

Jede Fläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpuncte hat also drei, paarweise genommen, auf einander senkrechte, reelle Axen.

3. Nachdem wir die Richtungen der drei Axen gefunden haben, ist es leicht, ihre Gröfse zu bestimmen. Für den Durchschnittspunct einer Axe und der Fläche bestehen gleichzeitig die drei Gleichungen (1.) und (3.). Hieraus ergiebt sich, wenn wir zugleich $c=1$ setzen:

$$(Aa^2+A'b^2+A''+2Bb+2B'a+2B''ab)z^2 = 1$$

und, wenn wir das Quadrat der halben Axenlängen durch r^2 und den reciproken Werth desselben durch s^2 bezeichnen,

$$\frac{1}{s^2} = r^2 = (1+a^2+b^2)z^2,$$

und hiernach

$$5'.\quad Aa^2+A'b^2+A''+2Bb+2B'a+2B''ab = (1+a^2+b^2)s^2.$$

Addiren wir ferner die Gleichungen (4.), nachdem wir die erste derselben mit a^2, die zweite mit b^2 multiplicirt haben, so kommt:

$$Aa^2+A'b^2+Bb+B'a+2B''ab-(Bb+B'a+A'')(a^2+b^2) = 0,$$

und wenn wir diese Gleichung von der vorhergehenden abziehen und zugleich den Factor $(1+a^2+b^2)$ weglassen:

$$6.\quad B'a+Bb+(A''-s^2) = 0.$$

Auf gleiche Weise, oder auch durch blofse Buchstabenvertauschung, ergiebt sich:

$$7.\quad B''a+B+(A'-s^2)b = 0,\quad B'+B''b+(A-s^2)a = 0.$$

Endlich erhalten wir, wenn wir a und b zwischen den drei letzten

Gleichungen eliminiren:

$$8.\quad (A-s^2)(A'-s^2)(A''-s^2)-B^2(A-s^2)-B'^2(A'-s^2)-B''^2(A''-s^2) + 2BB'B'' = 0,$$

oder auch, wenn wir in Beziehung auf s^2 ordnen:

$$9.\quad s^6-(A+A'+A'')s^4+[(AA'-B''^2)+(AA''-B'^2)+(A'A''-B^2)]s^2 - [AA'A''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2+2BB'B''] = 0.$$

Diese Gleichung giebt drei Werthe für s^2, den drei Werthenpaaren von a und b entsprechend, welche, wie diese, in Folge der Gleichungen (6.) und (7.) alle drei reell sind. Hiernach bestimmen die Zeichen der Werthe der drei Coëfficienten dieser Gleichung unmittelbar, ob die Werthe von s^2 alle drei positiv, oder alle drei negativ, oder zwei positiv und einer negativ, oder endlich einer positiv und zwei negativ sind. Diesem entsprechend ist dann die Fläche ein Ellipsoïd, eine imaginäre Fläche, ein einschaaliges, oder ein zweischaaliges Hyperboloïd.

4. Das letzte, von s^2 unabhängige Glied in der Gleichung (9.) ist dem reciproken Werthe des Productes der Quadrate der drei halben Axen der Fläche gleich. Ist diese ein Cylinder, so verschwindet dieses Glied, und dann hat die Gleichung

$$s^4-(A+A'+A'')s^2+[(AA'-B''^2)+(AA''-B'^2)+(A'A''-B^2)] = 0$$

die reciproken Werthe der Quadrate der halben Axen derjenigen Schnitte, welche senkrecht gegen seine Seiten geführt werden, zu ihren Wurzeln. Steht der Cylinder auf einer der drei Coordinaten-Ebenen, etwa auf der Ebene xy senkrecht, so verschwinden aus der allgemeinen Gleichung die drei Coëfficienten A'', B und B', und die letzte Gleichung reducirt sich auf folgende:

$$10.\quad s^4-(A+A')s^2+(AA'-B''^2) = 0,$$

welche nun noch die reciproken Werthe der beiden halben Axen der Basis des Cylinders, oder, was dasselbe ist, der durch die Gleichung

$$Ax^2+Ay^2+2B''xy = 1$$

bei Abstraction von der dritten Dimension dargestellten Curve zweiter Ordnung, zu Wurzeln hat. Für dieselbe Curve ist die Axenrichtung durch die Gleichung (5.) gegeben.

5. Wenn wir derselben Fläche nach einander verschiedene Lagen gegen die Coordinaten-Axen geben, indem wir diese um ihren Anfangspunct irgendwo drehen, so erhalten die Coëfficienten ihrer Gleichung (1.)

verschiedene Werthe, während die Gleichung (9.) unverändert dieselbe bleibt. A, A', A'' bedeuten die Quadrate der reciproken Werthe der jedesmaligen Halbdurchmesser, welche in die drei Coordinaten-Axen fallen. Ihre Summe ist also constant.

Wenn man ein System dreier auf einander senkrechten, im Mittelpuncte einer Fläche zweiter Ordnung sich schneidenden geraden Linien um den Mittelpunct beliebig sich drehen läfst, so ist für alle Lagen die Quadratsumme der reciproken Werthe der in die jedesmaligen drei geraden Linien fallenden Halbdurchmesser der Fläche dieselbe.

Nach der Gleichung (10.) bedeutet $(AA'-B''^2)$ den reciproken Werth des Products der Quadrate der beiden halben Axen der Durchschnittscurve, also (für den Fall des Ellipsoïds), wenn wir noch durch π^2 dividiren, den reciproken Werth des Quadrats der Fläche dieser Curve. Aehnliche Bedeutung haben die Ausdrücke $(AA''-B'^2)$ und $(A'A''-B^2)$, und somit giebt die Betrachtung des zweiten Coëfficienten in der Gleichung (9.) den folgenden Satz.

Wenn man ein System dreier auf einander senkrechter und im Mittelpuncte eines Ellipsoïds sich schneidenden Ebenen um diesen Mittelpunct beliebig sich drehen läfst, so ist für alle Lagen die Quadratsumme der reciproken Werthe des Flächen-Inhalts der drei Durchschnittscurven constant.

Für den Fall eines geraden Cylinders können wir für die drei schneidenden Ebenen irgend drei auf einander senkrecht stehende nehmen; die constante Summe ist alsdann dem Quadrate des reciproken Werthes der Fläche seiner Basis gleich.

§. 2.

6. Mit derselben Leichtigkeit, wie wir eine Fläche zweiter Ordnung durch ihre Puncte bestimmen, indem wir sie auf gewöhnliche Weise durch eine Gleichung ausdrücken, können wir dieselbe auch durch die sie berührenden Ebenen bestimmen, indem wir sie durch die folgende Gleichung ausdrücken:

1. $At^2+A'u^2+A''v^2+2Buv+2B'tv+2B''tu = w^2$.*)

---

*) Vergl. *Note sur une théorie nouvelle des surfaces.* Journ. Bd. IX. pg. 124. Eine Ebene, welche durch die gewöhnliche Gleichung

$$tx+uy+vz = w,$$

Diefs ist die allgemeine Gleichung von Flächen, welche einen Mittelpunct haben; und dieser ist hier zum Anfangspuncte der Coordinaten genommen.

Die Absicht dieses zweiten Paragraphen ist, nach der neuen analytischen Bezeichnungsweise wiederum die Lage und die Gröfse der Axen zu bestimmen; was hier mit noch gröfserer Leichtigkeit geschehen kann.

7. Wir wollen dabei von der Anschauung ausgehen, dafs, wenn wir eine Schnitt-Ebene durch den Mittelpunct legen, der Pol dieser Ebene nach bestimmter Richtung unendlich weit liege, und dafs, wenn diese Richtung auf der Schnitt-Ebene senkrecht steht, dieselbe ein *Hauptschnitt* der Fläche zweiter Ordnung sei.

Die Gleichung der Schnitt-Ebene in gewöhnlichen Coordinaten sei

$$2.\quad t'x + u'y + v'z = 0;$$

wonach die beiden Gleichungen einer auf derselben im Anfangspuncte senkrechten geraden Linie die folgenden sind:

$$3.\quad x = \frac{t'}{v'}z,\quad y = \frac{u'}{v'}z.$$

Für die Gleichung des Poles der Schnitt-Ebene, deren Coordinaten t', u', v', 0 sind, erhalten wir unmittelbar:

$$4.\quad (At' + B''u' + B'v')t + (B''t' + A'u' + Bv')u + (B't' + Bu' + A''v')v = 0\,^{*)}.$$

dargestellt wird, ist durch die vier Constanten t, u, v, w, (von denen wir jede beliebige gleich Eins setzen können, und welche wir Coordinaten der Ebene nennen) bestimmt. Ist zwischen diesen vier Coordinaten blofs eine homogene Gleichung gegeben, so entsprechen dieser unendlich viele Ebenen, welche eine bestimmte Fläche umhüllen. Ist die homogene Gleichung blofs vom ersten Grade, und folgende:

$$x't + y'u + z'v = w,$$

so umhüllen alle Ebenen einen *Punct*, dessen Coordinaten x', y' und z' sind. Fehlt w, so liegt der Punct in der Richtung

$$x = \frac{x'}{z'}.z,\qquad y = \frac{y'}{z'}.z,$$

unendlich weit.

*) Wenn wir nemlich, der Kürze wegen, die Gleichung (1.) durch $\Omega = 0$ darstellen, so ist die Gleichung des Poles einer gegebenen Ebene, deren Coordinaten t', u', v', w' sind,

$$\frac{d\Omega}{dt}.t' + \frac{d\Omega}{du}.u' + \frac{d\Omega}{dv}.v' + \frac{d\Omega}{dw}.w' = 0:$$

eine Gleichung, die sich nicht ändert, wenn wir die Constanten t', u', v' und w' bezüglich mit den Variabeln t, u, v, w vertauschen. Das letzte Glied fällt aus, wenn $w' = 0$ ist.

Der Pol liegt unendlich weit, weil w fehlt. Die Richtung, nach welcher er unendlich weit liegt, mufs also mit der Richtung der Linie (3.) zusammenfallen, wenn (2.) ein Hauptschnitt der Fläche sein soll. Diefs geschieht, wenn

$$5.\quad \frac{At'+B''u'+B'v'}{B't'+Bu'+A''v'} = \frac{t'}{v'},\qquad \frac{B''t'+A'u'+Bv'}{B't'+Bu'+A''v'} = \frac{u'}{v'} \text{ ist.}$$

Schaffen wir aus diesen Gleichungen die Nenner fort, und setzen überdies $v' = 0$, so kommt

$$6.\quad \begin{cases} At'+B''u'+B'-(B't'+Bu'+A'')t' = 0, \\ B''t'+A'u'+B-(B't'+Bu'+A'')u' = 0. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind drei Werthenpaare für t' und u' und dadurch die drei Hauptschnitte der Fläche bestimmt. Diese, und also auch die drei Axen, sind reell, weil die vorstehenden Gleichungen genau dieselben Coëfficienten haben, wie die Gleichungen (4.) der 2. Nummer.

8. Wenn wir, wie in der Note zur vorigen Nummer, die Gleichung der Fläche durch

$$\Omega = 0$$

darstellen, so können wir die Gleichungen (5.) durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{d\Omega}{dv}v = \frac{d\Omega}{dt}t,\qquad \frac{d\Omega}{dv}v = \frac{d\Omega}{du}u.$$

Die durch diese beiden Gleichungen gegebenen Werthe von $\frac{t}{v}$ und $\frac{u}{v}$ bestimmen die Lage der drei Hauptschnitte.

9. Wenn wir in der Gleichung der Fläche

$$t = t',\qquad u = u',\qquad v = 1$$

setzen, so ergiebt sich

$$At'^2+A'u'^2+A''+2Bu'+2B't'+2B''tu = w^2,$$

wo alsdann w dasjenige Segment bedeutet, welches eine mit einem Hauptschnitte parallele Tangential-Ebene der Fläche von der Axe der z abschneidet. Der senkrechte Abstand des Anfangspunctes der Coordinaten von dieser Tangential-Ebene ist eine halbe Axe der Fläche. Bezeichnen wir die Länge derselben durch r, so ergiebt sich

$$w^2 = (1+t'^2+u'^2)r^2,$$

und mithin

$$At'^2+A'u'^2+A''+2Bu'+2B't'+2B''t'u' = (1+t'^2+u'^2)r^2.$$

Diese Gleichung hat wiederum genau dieselbe Form, wie die Gleichung (5'.) der 3. Nummer. Wenn wir sie daher mit den Gleichungen (6.) zusammen-

stellen, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$7.\quad \begin{cases} B't'+Bu'+(A''-r^2) = 0, \\ B''t'+B\quad+(A'-r^2)u' = 0, \\ B'+B''u'+(A-r^2)t' = 0, \end{cases}$$

$$8.\quad (A-r^2)(A'-r^2)(A''-r^2)-B^2(A-r^2)-B'^2(A'-r^2)-B''^2(A''-r^2) \\ +2BB'B'' = 0,$$

$$9.\quad r^6-(A+A'+A'')r^4+[(AA'-B''^2)+(AA''-B'^2)+A'A''-B^2)]r^2 \\ -[AA'A''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2+2BB'B''] = 0,$$

die wir unmittelbar hinschreiben können, weil auch sie dieselbe Form haben müssen, wie die entsprechenden Gleichungen der 3. Nummer.

Die Gleichungen (7.) können wir, analog wie in der 8. Nummer, indem wir die partiellen Differentialcoëfficienten auf die Coordinaten der Hauptschnitte beziehen, auch in folgender Form schreiben:

$$s^2 = \frac{1}{v'}\cdot\frac{d\Omega'}{dv'} = \frac{1}{u'}\cdot\frac{d\Omega'}{du'} = \frac{1}{t'}\cdot\frac{d\Omega'}{dt}.$$

10. An die vorstehende Gleichung (9.) knüpfen sich ähnliche Bemerkungen, wie an die Gleichung (9.) in der 4. Nummer. Die neue Gleichung hat genau dieselben Coëfficienten. Ihre drei Wurzeln sind also reell; ob ihre Werthe positiv oder negativ und demnach die drei Axen der Fläche bezüglich reell oder imaginär sind, hängt von denselben Bedingungen ab, wie früher. Wir erhalten also auch, gleichviel, ob wir die Flächen zweiter Ordnung durch die Gleichnng (1.) der 1. oder durch die Gleichung (1.) der 6. Nummer darstellen, genau dieselben Bedingungen zwischen den Coëfficienten, um die verschiedenen Haupt-Arten von Flächen dieser Ordnung zu unterscheiden. Wenn insbesondere das constante Glied in der vorstehenden Gleichung (9.) verschwindet, so geht die Fläche, indem eine Axe derselben (die früher bei dieser Voraussetzung unendlich wurde) verschwindet, in eine *ebene Curve* über, welche insbesondere in der Ebene der xy liegt, wenn aus der allgemeinen Gleichung die drei Coëfficienten A'', B und B' ganz verschwinden. Diese Gleichung geht alsdann in die folgende über:

$$10.\quad At^2+A'u^2+2B''tu = 1,$$

und zur Bestimmung der beiden halben Axen der bezüglichen Curve ergiebt sich

$$11.\quad r^4-(A+A')r^2+(AA'-B''^2) = 0.$$

propter eliminationem effici potest aequatio finalis, formae rationalis, inter y et x, unde fit, ut integrale propositum

$$\int \varpi(x, y_1, y_2, y_3, \dots y_p)\,dx$$

abeat in

$$\int y\,dx,$$

ubi y est radix quaedam aequationis algebraicae et rationalis inter x et y, aut si $f(x)$ est functio integra per denominatores omnes coëfficientium illius aequationis divisibilis, integrale nostrum formam induit

$$2. \quad \int \frac{y\,dx}{f(x)},$$

ubi y est radix quaedam aequationis (1.), in qua coëfficientes $p_0, p_1, p_2, \dots$ sunt integrae functiones ipsius x. Si autem $\frac{1}{f(x)}$ in fractiones simplices decomponitur, integrale (2.) in simpliciora iterum resolvitur, quorum forma est

$$3. \quad \int \frac{y\,dx}{(x-a)^r},$$

ubi r est numerus positivus et integer, aut forsan 0, et a quantitas constans vel realis vel imaginaria. Praeterea ob substitutionem $y = z - \frac{1}{n} p_{n-1}$ in (1.) et (2.) factam, cum $\int \frac{p_{n-1}\,dx}{f(x)}$ finitis terminis exprimi possit, semper statuere licet, in integralibus (2.) et (3.) y determinari per aequationem illam (1.), ubi sit $p_{n-1} = 0$. Deinde vero si ponimus $y = \frac{p_0 f(x)}{z}$, pro (2.) hanc formam obtinemus $\int \frac{p_0\,dx}{z}$, quae, cum p_0 sit functio integra, iterum resolvitur in

$$3'. \quad \int \frac{x^r\,dx}{z},$$

ubi r est numerus positivus et integer, aut forsan 0, et z radix quaedam aequationis, cujus forma est illa (1.), in qua coëfficientes ut antea sunt functiones integrae sed simul $p_1 = 0$. Formae illae (3.) et (3'.), si in illa supponitur $p_{n-1} = 0$, in hac $p_1 = 0$, simplicissimae sunt, ad quas generaliter reduci possunt integralia differentialium algebraicorum, ita ut unam aliamve formam pro arbitrio eligere liceat.

8.

De integralibus differentialium algebraicorum.

(Auct. *C. Ramus*, prof. math. Hafn.)

---

§. 1.

Propositum nobis sit integrale

$$\int \varpi(x,y)\,dx,$$

ubi $\varpi(x,y)$ est functio rationalis quantitatum x et y, atque y radix quaedam aequationis algebraicae

$$1. \quad 0 = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 \ldots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n,$$

in qua coëfficientes $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ sunt integrae functiones ipsius x. Si enim essent fractae, formam haberent fractionum, quarum et numeratores et denominatores omnes essent functiones integrae, tum autem ponentes $y = \frac{u}{f(x)}$, ubi $f(x)$ esset polynomium integrum per omnes illos denominatores divisibile, pro $\varpi(x,y)$ haberemus functionem rationalem ipsarum x et u, existente u radice quadam aequationis formae (1.), non nisi integros coëfficientes continentis. Si autem $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ essent functiones rationales duarum quantitatum x et z, existente z radice quadam aequationis datae ratronalis inter x et z, propter duas aequationes, quarum una x et z contineret, altera x, y et z, eliminaretur z et sic rursus haberemus y ab x immediate dependentem propter aequationem finalem, formae rationalis, inter x et y. Quod idem obtineri potest, si solummodo nobis adsunt $p+1$ aequationes rationales, quarum quaeque continet omnes has: $y, z_1, z_2, z_3, \ldots \ldots z_p$ et x; eliminatis enim $z_1, z_2, z_3, \ldots z_p$, aequatio finalis, formae rationalis, continebit solas y et x. Praeterea si pro $\varpi(x,y)$ propositam habemus generaliorem hanc

$$\varpi(x, y_1, y_2, y_3, \ldots y_p)$$

scilicet functionem rationalem quantitatum omnium $x, y_1, y_2, y_3, \ldots y_p$, ita ut aequationes adsint rationales quae sequuntur: 1ma inter y_1 et x, 2da inter y_2 et x, 3^tia^ inter y_3 et x, ... p^{ta} inter y_p et x; ex omnibus hisce junctis cum sequenti

$$y = \varpi(x, y_1, y_2, y_3, \ldots y_p)$$

secundum theoriam functionum symmetricarum sit functio integra ipsius a. Constat autem, fractionem (9.) decomponi posse ut sequitur:

$$11.\quad \frac{F(a)}{\varrho(a)} = \Pi\frac{F(x)}{\varrho(x).(x-a)} + \Sigma\frac{F(x)}{\varrho'(x).(a-x)},$$

$\Pi\varphi(x)$ significante coëfficientem ipsius $\frac{1}{x}$, qui exstet in serie, in quam explicari possit $\varphi(x)$ secundum ordinem potentiarum quantitatis x descendentium, $\Sigma\varphi(x)$ autem summam $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)\ldots.+\varphi(x_\mu)$. Jam cum x_k sit radix aequationis (7.) et $\varrho(x)$ habeat formam (6.), quantitatum $s_1(x_k)$, $s_2(x_k)$, $s_3(x_k)$, ... $s_n(x_k)$ evanescat aliqua, ut $s_i(x_k)$, necesse est, unde propter (10.) concludimus

$$F(x_k) = f(x_k)y_i^m(x_k)s_1(x_k)s_2(x_k)\ldots.s_{i-1}(x_k)s_{i+1}(x_k)\ldots.s_n(x_k)\,\delta.s_i(x_k)$$
$$= f(x_k)y_i^m(x_k)\delta.\varrho(x_k),$$

ubi $\delta.\varrho(x_k)$ respicit ad solos coëfficientes ipsius ϱ, non ad valorem radicis x_k, licet hoc ab independentibus implicita ratione dependeat. Est igitur

$$\frac{F(x_k)}{\varrho'(x_k).(a-x_k)} = \frac{f(x_k)y_i^m(x_k)\delta.\varrho(x_k)}{\varrho'(x_k).(a-x_k)} = \frac{f(x_k)y_i^m(x_k)d.x_k}{x_k-a} = d.\psi(x_k)$$

(scilicet secundum (8.) et (4.)), itaque

$$12.\quad \Sigma\frac{F(x)}{\varrho'(x).(a-x)} = d.[\psi(x_1)+\psi(x_2)+\psi(x_3)\ldots.+\psi(x_\mu)].$$

Praeterea e formula (9.) sequitur

$$13.\quad \Pi\frac{F(x)}{\varrho(x).(x-a)}$$
$$= \Pi\frac{f(x)}{x-a}\left[\frac{y_1^m(x)\delta s_1(x)}{s_1(x)} + \frac{y_2^m(x)\delta s_2(x)}{s_2}\ldots.+\frac{y_n^m(x)\delta s_n(x)}{s_n(x)}\right].$$

Quae expressiones (12.) et (13.) in formula (11.) substitutae, et quae inde nascitur fractionis $\frac{F(a)}{\varrho(a)}$ expressio rursus in (9.) substituta, dant:

$$d.[\psi(x_1)+\psi(x_2)\ldots.+\psi(x_\mu)]$$
$$= \begin{cases} f(a)\left[\frac{y_1^m(a)\delta s_1(a)}{s_1(a)} + \frac{y_2^m(a)\delta s_2(a)}{s_2(a)}\ldots.+\frac{y_n^m(a)\delta s_n(a)}{s_n(a)}\right] \\ -\Pi\frac{f(x)}{x-a}\left[\frac{y_1^m(x)\delta s_1(x)}{s_1(x)} + \frac{y_2^m(x)\delta s_2(x)}{s_2(x)}\ldots.+\frac{y_n^m(x)\delta s_n(x)}{s_n(x)}\right].\end{cases}$$

Huius alterum membrum est differentiale accuratum quoad signum δ, nam f, y_1, y_2, ... y_n nullam continent independentem. Habemus igitur integrando

$$14.\quad \begin{cases} \psi(x_k) = \int_0^{x_k} \frac{f(x) y_i^m(x)}{x-a} dx, \qquad s_i(x_k) = 0, \\ \psi(x_1) + \psi(x_2) \ldots + \psi(x_\mu) \\ = \begin{cases} C + \quad f(a)\, [y_1^m(a) \log s_1(a) + y_2^m(a) \log s_2(a) \ldots + y_n^m(a) \log s_n(a)] \\ -\Pi \frac{f(x)}{x-a} [y_1^m(x) \log s_1(x) + y_2^m(x) \log s_2(x) \ldots + y_n^m(x) \log s_n(x)], \end{cases} \end{cases}$$

ubi C est constans arbitraria. Haecce relatio, forma transcendenti, inter $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ atque variabiles independentes locum habens una cum algebraica illa (7.), est ipsa indoles et proprietas fundamentalis functionis ψ. Jam si aequationis (14.) utrumque membrum quoad quantitatem a differentiatur, ob

$$\frac{d^{r-1}\psi(x)}{da^r} = 1.2.3 \ldots (r-1) \int \frac{f(x) y^m dx}{(x-a)^r}$$

oritur proprietas fundamentalis hujus ultimi integralis, quod positis $m = 1$ et $f(x) = 1$ formam habet (3.), ad quam omnia differentialium algebraicorum integralia reduci posse supra est demonstratum (§. 1.). Si vero aequationis (14.) utrumque membrum per da multiplicatur, deinde quoad a integratur, theorema fundamentale obtinetur, quod valet de integrali

$$\int f(x) \log(x-a) . y^m dx,$$

quod posito $x = a + z$ ad formam reducitur simpliciorem hanc:

$$15. \quad \int f(z) \log z . y^m dz$$

existente $f(z)$ functione integra ipsius z et y radice quadam aequationis algebraicae (1.) siquidem in hac z pro x substituas et coëfficientes $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ functiones integras ipsius z esse admittas. Maximi autem est hic observare, integralia quae praebet alterum membrum formulae (14.), ad integralium classem pertinere eandem, ad quam illud (15.) sit referendum. Nam si in integrali quodam, cujus forma est

$$\int f(a) \log s_k(a) . y_k^m(a) da$$

ponitur $s_k(a) = u$ et aequatio formatur

$$0 = (u - s_1(a))(u - s_2(a))(u - s_3(a)) \ldots (u - s_n(a)),$$

quae u et a rationaliter continet, obtinetur $da = \Phi(u, a) du$, ubi $\Phi(u, a)$ est functio rationalis quantitatum u et a; sed si ponitur

$$f(a) \Phi(u, a) y_k^m(a) = v,$$

haecce aequatio juncta cum iis quae exstant, una inter a et $y_k(a)$, altera

inter a et u, eliminatis a et $y_k(a)$, aequationem dat finalem rationalem inter u et v, et sic integrale nostrum erit $\int \log u . v\, du$, vel si placet

$$16. \quad \int \frac{\log u}{F(u)} z\, du,$$

ubi $F(u)$ est functio integra ipsius u, et z radix aequationis formae (1.), siquidem z pro y ponas et p_0, p_1, p_2, ... p_{n-1} integras functiones ipsius u esse admittas. Facile denique apparet, in aequatione fundamentali, quae pro functione (15.) obtinetur, non solum summam ab hac ipsa formatam contineri scilicet pro radicibus aequationis algebraicae gradus μti, sed et similem summam a functione (16.) formatam, et respondentem radicibus alius cujusdam aequationis algebraicae gradus $n$ti.

§. 3.

Si proponitur integrale quod sequitur

$$17. \quad \psi(x) = \int \frac{f(x)}{x-a} \cdot \frac{dx}{y^m(x)},$$

ubi $f(x)$, $y(x)$, m et a easdem quas antea habent significationes, possumus quidem in iis, quae praecedunt, m ubique in $-m$ mutare, sed attendendum est, functionem $F(a)$, formula (10.) exhibitam, non amplius manere integram, esse scilicet

$$F(a) = \frac{P(a)}{y_1^m(a) y_2^m(a) \dots y_n^m(a)} = \frac{(-1)^{mn} P(a)}{p_0^m(a)},$$

ubi $P(a)$ sit functio integra ipsius a. Igitur pro (11.) habemus

$$18. \quad \frac{F(a)}{\varrho(a)} =$$

$$\Pi \frac{F(x)}{\varrho(x).(x-a)} + \Sigma \frac{F(x)}{\varrho'(x).(a-x)} + \frac{(-1)^{mn}}{1.2.3 \dots (m-1)} \Sigma \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \cdot \frac{P(x)}{\varrho(x).p_0'^m(x).(a-x)},$$

ubi Π et prius Σ easdem quas antea habent significationes, alterum Σ est summa quae respondet valoribus $x = \lambda_1$, λ_2, ... λ_t, id est, radicibus aequationis $p_0(x) = 0$. Cum harum quaelibet λ_r pro x in aequatione (1.) substituta faciat $p_0 = 0$, e quantitatibus $y_1(\lambda_r)$, $y_2(\lambda_r)$, ... $y_n(\lambda_r)$ evanescat aliqua necesse est, sunt enim hae radices aequationis, cujus deest terminus ille, qui ab incognita non dependet. Sit $y_{(r)}(\lambda_r)$ radix illa evanescens, ita ut (r), qui est unus e numeris 1, 2, 3, ... n, ab alio numero r dependeat. Itaque si in

$$P(x) = y_1^m(x) y_2^m(x) \dots y_n^m(x) F(x)$$

$$= f(x) \begin{cases} y_2^m(x) y_3^m(x) \dots y_n^m(x) s_2(x) s_3(x) \dots s_n(x) \, \delta s_1(x) \\ + y_1^m(x) y_3^m(x) \dots y_n^m(x) s_1(x) s_3(x) \dots s_n(x) \, \delta s_2(x) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ + y_1^m(x) y_2^m(x) \dots y_{n-1}^m(x) s_1(x) s_2(x) \dots s_{n-1}(x) \delta s_n(x) \end{cases}$$

facimus $x = \lambda_r$, habemus

$$P(\lambda_r) = f(\lambda_r) y_1^m(\lambda_r) y_2^m(\lambda_r) \dots y_{(r)-1}^m(\lambda_r) y_{(r)+1}^m(\lambda_r) \dots y_n^m(\lambda_r) \varrho(\lambda_r) . \frac{\delta s_{(r)}(\lambda_r)}{s_{(r)}(\lambda_r)}$$

unde sequitur

$$(-1)^{mn} \frac{P(\lambda_r)}{\varrho(\lambda_r) p'^m_0(\lambda_r)(a-\lambda_r)} = \frac{f(\lambda_r) p_0^m(\lambda_r)}{p'^m_0(\lambda_r) y_{(r)}^m(\lambda_r)(a-\lambda_r)} . \frac{\delta s_{(r)}(\lambda_r)}{s_{(r)}(\lambda_r)}$$

$$= \frac{f(x)}{a-x} . \frac{(x-\lambda_r)^m}{y_{(r)}^m(x)} . \frac{\delta s_{(r)}(x)}{s_{(r)}(x)}$$

siquidem ponitur $x = \lambda_r$, id quod facit $\frac{(x-\lambda_r)^m}{y_{(r)}^m(x)} = \frac{0}{0}$, cujus tamen valor solita via facile determinatur. His factis pro (14.) invenitur

$$19. \begin{cases} \psi(x_k) = \int_0^{x_k} \frac{f(x) dx}{(x-a) y_i^m(x)}, \quad s_i(x_k) = 0, \quad y_{(r)}(\lambda_r) = 0, \quad \overline{\Phi(z_r)} = \Phi(\lambda_r), \\ \psi(x_1) + \psi(x_2) \dots + \psi(x_\mu) \\ = \begin{cases} C + f(a) \left[\frac{\log s_1(a)}{y_1^m(a)} + \frac{\log s_2(a)}{y_2^m(a)} \dots + \frac{\log s_n(a)}{y_n^m(a)} \right] \\ - \Pi \frac{f(x)}{x-a} \left[\frac{\log s_1(x)}{y_1^m(x)} + \frac{\log s_2(x)}{y_2^m(x)} \dots + \frac{\log s_n(x)}{y_n^m(x)} \right] \\ + \frac{1}{1.2.3 \dots (m-1)} \sum_{r=1}^{r=t} \overline{\frac{d^{m-1}}{dz_r^{m-1}} . \left(\frac{f(z_r) . (z_r - \lambda_r)^m . \log s_{(r)}(z_r)}{(z_r - a) y_{(r)}^m(z_r)} \right)}. \end{cases} \end{cases}$$

Haec tamen formula tribus nititur conditionibus, quae sequuntur

Prima conditio est, ut $\varrho(x)$ et $p_0(x)$ nullum habeant factorem communem, nam si $x - \lambda_r$ esset factor polynomii $\varrho(x)$, denominator fractionis $\frac{F(a)}{\varrho(a)}$ contineret factorem $a - \lambda_r$ elevatum in potentiam, quae excederet *m*tam, et sic decompositio nostra foret falsa. Hic autem casus evitatur, si aequatio $\varrho(x) = 0$ propter divisionem ab iis omnibus factoribus liberatur, in quibus nulla continetur variabilis independens, quo facto $\varrho(x)$ nullum continere potest factorem $x - \lambda_r$.

Altera conditio est, ut $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_t$ sint omnes inaequales. Si enim est $\lambda_1 = \lambda_2$, pro duobus terminis summae Σ, qui respondent valoribus $r = 1$ et $r = 2$, unicus terminus sumendus est, sed simul in

$$20. \quad \frac{1}{1.2.3\dots m-1}, \quad \frac{d^{m-1}}{dz_r^{m-1}}, \quad (z_r - \lambda_r)^m$$

pro m scribendum est $2m$. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, pro tribus terminis, qui respondent valoribus $r = 1, 2, 3$, unicus sumendus est, sed simul in tribus illis locis (20.) pro m scribendum est $3m$, et sic porro. Observentur haec in omnibus quibusvis radicibus illis λ, si quae exstant, sibi aequalibus.

Tertia conditio est, ut valor quisque $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_t$ unam solummodo e radicibus $y_1, y_2, \dots y_n$ faciat evanescere. Si enim $x = \lambda_\theta$ duas radices $y_{(\theta)}(\lambda_\theta)$ et $y_{(\theta')}(\lambda_\theta)$ evanescere facit, sequitur $P(\lambda_\theta) = 0$, ita ut fractio $\frac{F(a)}{\varrho(a)} = \frac{(-1)^{mn} P(a)}{\varrho(a) p_0^m(a)}$ ad minores terminos reduci queat, quo fit ut denominatur contineat solummodo $(a - \lambda_\theta)^{m-1}$. Praeterea in $P(\lambda_\theta)$ nunc duo illi termini conservandi sunt, qui $y_{(\theta)}$ et $y_{(\theta')}$ non simul continent. Debet itaque in tribus illis locis (20.), quando $r = \theta$, m mutari in $m - 1$, et eodem tempore $\frac{\log s_{(\theta)}(\lambda_\theta)}{y_{(\theta)}^m(\lambda_\theta)}$ in $\frac{\log s_{(\theta)}(\lambda_\theta)}{y_{(\theta)}^m(\lambda_\theta)} + \frac{\log s_{(\theta')}(\lambda_\theta)}{y_{(\theta')}^m(\lambda_\theta)}$. Similiter res peragenda est, si tres pluresve radicum $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ evanescunt, ubi pro x substituitur radix quaedam aequationis $p_0 = 0$. Omnes hic casus facile semper agnoscuntur: nam si $p_0(\lambda_\theta) = 0$ sed $p_1(\lambda_\theta)$ non $= 0$, quantitatum $y_1, y_2, \dots \dots y_n$ una tantum evanescit propter $x = \lambda_\theta$; sed si $p_0(\lambda_\theta) = 0$, $p_1(\lambda_\theta) = 0$, $p_2(\lambda_\theta)$ non $= 0$, quantitatum, quas dixi, duae evanescunt propter $x = \lambda_\theta$; sic porro. Caeterum apparet, ordinem illum differentiationis $\frac{d^{m-1}}{dz_r^{m-1}}$ pro $r = \theta$ diminuendum quidem esse tot unitatibus, quot aequatio (1.) pro $x = \lambda_\theta$ radices habeat evanescentes, sed ita tamen ut ordo non fiat negativus, tum enim terminum summae Σ, qui respondeat valori $r = \theta$, esse ejiciendum, quippe quod $a - \lambda_\theta$ e denominatore fractionis decomponendae, ad minimos terminos reductae, dispareat.

Si in (1.) datur $0 = p_1 = p_2 \dots = p_{n-1}$, statuere licet $m < n$, nam hoc casu est $y = \sqrt[n]{-p_0}$, igitur $y^{pn+q} = (-p_0)^p \sqrt[n]{(-p_0)^q}$, si autem m non $< n$, facere possumus $m = pn + q$, ubi $q < n$; ita ut functia (17.) sit

$\psi(x) = \int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)(-p_0)^p \sqrt[n]{(-p_0)^q}}$, quae per decompositionem fractionis $\frac{1}{(x-a)(-p_0)^p}$ in formam reducitur simpliciorem

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x-c)^r y^q} = \frac{1}{1.2\ldots.r-1} \cdot \frac{d^{r-1}}{dc^{r-1}} \int \frac{f(x)dx}{(x-c)y^q}.$$

Eodem hoc casu, $m < n$ et $0 = p_1 = p_2 \ldots. = p_{n-1}$, cum omnes radices $y_1, y_2, \ldots. y_n$ pro quovis numero r, id est pro omnibus valoribus $x = \lambda_1, \lambda_2, \ldots. \lambda_t$, evanescant, ordo $m-1$ mutatus in $m-n-1$ evadit negativus, unde sequitur, ut summa Σ tota dispareat.

§. 4.

Formula (19.) duos complectitur casus speciales bene notos, quos dedit *Abelus* (huj. diar. Vol. III. pag. 317 et Vol. VI. pag. 78). Primus casus sic obtinetur. Ponendum est:

$$n = 2, \quad m = 1, \quad p_0 = -\varphi x, \quad p_1 = 0,$$
$$\varphi x = \varphi_1 x . \varphi_2 x, \quad q_0 = \theta x . \varphi_1 x, \quad q_1 = \theta_1 x,$$

ubi $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, θx, $\theta_1 x$ sunt functiones integrae ipsius x, sed in solis θx et $\theta_1 x$ coëfficientes exstant variabiles et independentes. Invenitur

$$y_1 = \sqrt{(\varphi x)}, \qquad y_2 = -\sqrt{(\varphi x)},$$
$$s_1(x) = q_0 + q_1\sqrt{(\varphi x)}, \qquad s_2(x) = q_0 - q_1\sqrt{(\varphi x)},$$
$$s_1(x)s_2(x) = q_0^2 - q_1^2 \varphi x = \varphi_1 x . (\theta^2 x . \varphi_1 x - \theta_1^2 x . \varphi_2 x),$$

igitur, ob primam conditionem, cui obnoxia esse debet formula (19.), cum in $\varphi_1 x$ nulla adsit independens,

$$\varrho(x) = \theta^2 x . \varphi_1 x . \theta_1^2 x . \varphi_2 x.$$

Praeterea

$$\frac{\log s_1(x)}{y_1(x)} + \frac{\log s_2(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{\sqrt{(\varphi x)}} \log \frac{s_1(x)}{s_2(x)} = \frac{1}{\sqrt{(\varphi x)}} \log \frac{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}.$$

In altero membro formulae (19.), propter id quod supra explicavimus, disparet summa Σ. In primo membro habemus $\psi(x_k) = \pm \int^{x_k} \frac{f(x)\,dx}{(x-a)\sqrt{(\varphi x)}}$, signo superiore locum habente si $s_1(x_k) = 0$ id est $\theta x_k . \sqrt{(\varphi_1 x_k)} = -\theta_1 x_k . \sqrt{(\varphi_2 x_k)}$, signo inferiore si $s_2(x_k) = 0$ id est $\theta x_k . \sqrt{(\varphi_1 x_k)} = \theta_1 x_k . \sqrt{(\varphi_2 x_k)}$. Sed possumus in formula (19.) omnia signa mutare, rursus autem C pro $-C$ scribere. Quo facto invenimus

$$21. \left\{\begin{aligned} &\psi(x_k) = \int_0^{x_k} \frac{f(x)\,dx}{(x-a)\sqrt{(\varphi x)}},\\ &\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)\ldots\ldots+\varepsilon_\mu\psi(x_\mu)\\ &= \left\{\begin{aligned} &C - \frac{f(a)}{\sqrt{(\varphi a)}}\log\frac{\theta a.\sqrt{(\varphi_1 a)}+\theta_1 a.\sqrt{(\varphi_2 a)}}{\theta a.\sqrt{(\varphi_1 a)}-\theta_1 a.\sqrt{(\varphi_2 a)}}\\ &+\Pi\frac{f(x)}{(x-a)\sqrt{(\varphi x)}}\log\frac{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}+\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}-\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}, \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

ubi signum quodque $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_\mu$ indicat ± 1, ita ut generaliter ε_k determinetur per aequationem $\theta x_k.\sqrt{(\varphi_1 x_k)} = \varepsilon_k\theta_1 x_k.\sqrt{(\varphi_2 x_k)}$. Formula haec (21.) est prima illa *Abeli*, de qua supra dictum.

Ut altera obtineatur, ponendum est:

$$m < n,\quad p_1 = 0,\quad p_2 = 0,\quad \ldots\ldots\quad p_{n-1} = 0,\quad p_0 = -R,\quad f(x) = 1,$$

ubi R est functio integra ipsius x. Est igitur $y^n = R$ sive

$$y_1 = \sqrt[n]{R},\quad y_2 = \alpha\sqrt[n]{R},\quad y_3 = \alpha^2\sqrt[n]{R},\quad \ldots\ldots\quad y_n = \alpha^{n-1}\sqrt[n]{R},$$

ubi $1, \alpha, \alpha^2, \ldots\ldots \alpha^{n-1}$ sunt valores omnes quantitates $1^{\frac{1}{n}}$. Disparet hic quoque summa Σ, et evanescit terminus Π, quia $\frac{F(x)}{\varrho(x)}$ est fractio genuina. Habemus itaque

$$21. \left\{\begin{aligned} &\psi(x_k) = \alpha^{-im}\int_0^{x_k}\frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{R^m}},\quad s_{r+1}(x) = q_0 + q_1\alpha^r\sqrt[n]{R} + q_2\alpha^{2r}\sqrt[n]{R^2}\ldots\\ &\qquad\qquad\ldots + q_{n-1}\alpha^{(n-1)r}\sqrt[n]{R^{n-1}},\\ &s_{i+1}(x_k) = 0,\quad s_1(x).s_2(x).s_3(x)\ldots.s_n(x) = A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots.(x-x_\mu),\\ &\psi(x_1)+\psi(x_2)\ldots.\psi(x_\mu)\\ &= C + \frac{1}{\sqrt[n]{(R^m(a))}}[\log s_1(a) + \alpha^{-m}\log s_2(a) + \alpha^{-2m}\log s_3(a)\ldots. + \alpha^{-(n-1)m}\log s_n(a)]. \end{aligned}\right.$$

Quae est altera formula supra commemorata. Demonstrationem ejus non dedit auctor, haec solummodo scribens: „Rien n'est plus facile que la „démonstration de ce théorème. Je le donnerai dans un de mes mémoires „prochains dans le journal de Mr. *Crelle*." Sed hujus voti solutionem praematura mors impedivit. Quod autem in formula ejus signum — deest in exponentibus quantitatis α, id ni fallor errori typothetico debetur.

Adnot. In commentatione quae inscribitur „Demonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes" (huj. diar. Vol. IV, pag. 200) et in hac alia: „Sur la comparaisson des fonctions transcendantes" (Oeuvres complètes de *N. H. Abel,* Tom. II, pag. 66) methodus generalis indicata est inveniendi proprietates integralium, quales formulae nostrae (14.) et (19.) exhibent. Quam viam et ipsi ingressi sunt auctores disquisitionum, eandem materiam tractantium, quae in hoc diario exstant sequentes: Vol. X, pag. 195, et XI, 373 (*Minding*); XII, 89 (*Poisson*); XIX, 84 et 113 (*Jürgensen*); XX, 178 (*Broch*).

Hafniae d. 18 Septemb. 1840.

9.

Sur une question de probabilité relative aux corrections des hauteurs barométriques.

(Par Mr. *C. Ramus*, prof. à Copenhague.)

Dans un baromètre à syphon, la température étant $=0$, soit la section intérieure du tube perpendiculaire à l'axe $=1$, la longueur entière de la colonne du mercure $=\lambda$, et celle du mercure soutenu par la pression atmosphérique $=q$, donc celle, qui est en équilibre de lui même, $\lambda-q=a$. Or, la pression atmosphérique restant la même, si la température change et devient $=\vartheta$, il arrive 1° que les deux longueurs q et $\lambda-q$ en se dilatant deviennent

$$1.\quad q(1+m\vartheta),\qquad (\lambda-q)(1+m\vartheta),$$

où $m=0{,}0001802$; 2° que la dilatation du verre fait augmenter la section intérieure du tube, qui devient $(1+n\vartheta)^2$, où $n=0{,}0000086$, ce qui n'altère en rien la première des deux quantités (1.) ou la hauteur barométrique. Ainsi le volume du mercure soutenu par la pression atmosphérique s'accroît de $q(1+m\vartheta)[(1+n\vartheta)^2-1]$ aux dépens de celui, qui est en équilibre de lui même, ensorte que la deuxième quantité (1.) devienne d'abord
$(\lambda-q)(1+m\vartheta)-q(1+m\vartheta)[(1+n\vartheta)^2-1]=[\lambda-q(1+n\vartheta)^2](1+m\vartheta)$, puis, en vertu de la dilatation du verre,

$$2.\quad \left[\frac{\lambda}{(1+n\vartheta)^2}-q\right](1+m\vartheta)=b.$$

La hauteur barométrique vraie, ou celle qui répond à la température $=0$, étant $q=\lambda-a$, la hauteur observée, répondant à la température ϑ, est $Q=\lambda-b$, qui se trouve dès que b est immédiatement observé au moyen d'une échelle appliquée à la branche ouverte. L'expression (2.) donne

$$3.\quad Q=q(1+m\vartheta)-\frac{m-n(2+n\vartheta)}{(1+n\vartheta)^2}\vartheta\lambda,$$

d'où l'on tire la formule de correction, qui donne q exprimé en Q, ϑ, λ, m, n.

Quant à la quantité constante λ, qui dépend de la masse du mercure contenu dans l'instrument, il est évidemment impossible d'en assigner

la valeur de manière à faire disparaître l'influence de la chaleur. En effet, on n'en aurait la compensation exacte et générale, à moins que $Q = q$ ou en vertu de (3.)

$$\lambda = \frac{m(1+n\theta)^2}{m-n(2+n\theta)}q,$$

ce qui est absurde, θ et q étant variables, λ constant. Mais, la masse du mercure étant arbitraire, on peut demander, quelle est la valeur de λ la plus avantageuse. Comme dans aucune observation isolée on ne peut se dispenser de faire la correction relative à la chaleur, la question, pour qu'elle ait du sens, doit être exprimée comme suit: quelle est la valeur de λ propre à faire différer entre eux le moins possible les résultats moyens d'une très grande série d'hauteurs barométriques observées de celle des hauteurs y corréspondantes, réduites à la température O?

Regardons q et θ comme indépendants l'un de l'autre, ensorte que des valeurs quelconques de q et de θ aient des probabilités, qui soient des fonctions respectives de q et de θ. Ces fonctions étant désignées par $f(q)dq$ et $\varphi(\theta)d\theta$, la somme de toutes les différences des hauteurs barométriques observées et réduites dans un nombre infini des observations sera

$$\iint (Q-q)f(q)\varphi(\theta)dq\,d\theta,$$

ou en vertu de (3.)

$$\iint\left[qm\theta - \frac{m-n(2+n\theta)}{(1+n\theta)^2}\theta\lambda\right]f(q)\varphi(\theta)dq\,d\theta,$$

l'intégrale relative à q et à θ étant prise entre des limites constantes, savoir les valeurs extrèmes de ces quantités dans le lieu d'observation, ou même $q=0$, $q=\infty$, $\theta=-\infty$, $\theta=+\infty$, parceque $f(q)$ et $\varphi(\theta)$ s'évanouissent hors des valeurs extrèmes de q et θ. Ainsi on aura une expression de la forme $A-B\lambda$ qui, suivant la condition demandée devra être $=0$, partant $\lambda = \frac{A}{B}$, c'est à dire

$$4.\quad \lambda = \frac{m\int_0^\infty qf(q)dq.\int_{-\infty}^{+\infty}\theta\varphi(\theta)d\theta}{\int_0^\infty f(q)dq.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m-n(2+n\theta)}{(1+n\theta)^2}\theta\varphi(\theta)d\theta}.$$

Les fonctions f et φ ne nous sont pas données; mais on peut connaître la hauteur barométrique moyenne $=M$ et la température moyenne $=\Theta$, ce qui rend possible la détermination approximative de la valeur λ. En effet on a

$$M = \frac{\int_0^\infty q f(q)\,dq}{\int_0^\infty f(q)\,dq}, \qquad \Theta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\varphi(\theta)\,d\theta}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta)\,d\theta},$$

et d'ailleurs $\int_0^\infty f(q)\,dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\theta)\,d\theta = 1$; partant

$$5. \quad \lambda = \frac{m\Theta M}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m - n(2+n\theta)}{(1+n\theta)^2}\,\theta\varphi(\theta)\,d\theta}.$$

Le dénominateur de cette expression, développé suivant des puissances ascendantes de n, devient

$$(m-2n)\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\Phi(\theta)\,d\theta - (2m-3n)n\int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2\Phi(\theta)\,d\theta$$

$$= (m-2n)\Theta\left[1 - \frac{(2m-3n)n}{m-2n}\cdot\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2\varphi(\theta)\,d\theta}{\Theta}\right],$$

en négligeant les termes de l'ordre mn^2 et n^3. Ceci étant substitué dans (5.) donne

$$6. \quad \lambda = \frac{m}{m-2n}\left[1 + \frac{(2m-3n)n}{m-2n}\cdot\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2\varphi(\theta)\,d\theta}{\Theta}\right]M$$

$$= 1{,}10552147\left(1 + 0{,}00001765\cdot\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2\varphi(\theta)\,d\theta}{\Theta}\right)M.$$

Si T est la valeur numérique de la plus grande des températures qui puissent réellement exister dans une série d'observations ordinaires, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2\Phi(\theta)\,d\theta < T\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\Phi(\theta)\,d\theta, \text{ partant } \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2\varphi(\theta)\,d\theta}{\Theta} > 0 \text{ et } < T.$$

Par exemple, en supposant $T = 20$, on trouve

$$\lambda > 1{,}10552\,M \text{ et } < 1{,}10591\,M,$$

et en faisant $M = 336$,

$$\lambda > 371{,}45472 \text{ et } < 371{,}58576.$$

Lorsque toutes les observations ont été faites sous des circonstances particulières, telles que la température soit constamment comprise entre deux limites fixes, dont l'inférieur $= t$, le supérieur $= T$, et que toutes les valeurs de θ dans cet intervalle soient également probables, on peut détermi-

ner la valeur exacte de λ. Car dans ce cas on a $\varphi(\theta) = \frac{1}{T-t}$, et les limites de l'intégration $-\infty$, $+\infty$, doivent être changés en t et T, ce qui donne $\Theta = \frac{T+t}{2}$ et

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}mn^2(T^2-t^2)M}{m\log\frac{1+nT}{1+nt} - \frac{(m-n)n(T-t)}{(1+nT)(1+nt)} - n^2(T-t)}.$$

Par un procédé semblable à celui, employé par Laplace à la détermination de la probabilité des erreurs des résultats moyens, on trouve

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}\,dz$$

comme exprimant la probabilité que dans un grand nombre $= s$ d'observations la différence des résultats moyens des hauteurs barométriques observées et réduites soit comprise dans l'intervalle

$$7. \quad (k+h)u \pm 2(k+h)z\sqrt{\left(\frac{v-u^2}{s}\right)},$$

λ ayant une valeur quelconque, $-h$ et k étant les valeurs extrêmes, l'une négative, l'autre positive, de $Q-q$, et les quantités u et v étant déterminées comme suit:

$$\begin{cases} u = \int_{-h}^{k} x\psi(x)\,dx, \qquad v = \int_{-h}^{k} x^2\psi(x)\,dx, \\ \psi(x) = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left[\frac{x}{m\theta} + \frac{m-n(2+n\theta)}{m(1+n\theta)^2}\lambda\right].\frac{\varphi(\theta)}{\theta}\,d\theta \end{cases}$$

ensorte que $\psi(x)dx$ est la probabilité, que dans une observation quelconque $Q-q$ ait la valeur x. Lorsque s augmente à l'infini, la différence des deux résultats moyens, en convergeant, s'approche de $(k+h)u$. C'est donc la quantité qui, étant retranchée du résultat moyen des hauteurs barométriques observées donne celui des hauteurs réduites, lorsque le nombre des observations est infiniment grand. Donc, si l'on a une très grande série d'hauteurs barométriques observées et réduites, correspondantes les unes aux autres, on trouve immédiatement $(k+h)u$, ce qui fait connaître u, et de là on trouve une limite supérieure de v, parceque $v > \xi u'$, ξ désignant la valeur numérique la plus grande de x, et u' la valeur numérique de u.

Si λ a la valeur (5.) ou (6.), l'intervalle (7.) converge nécessairement vers 0 lorsque s augmente à l'infini, d'où il suit $(k+h)u = 0$, par-

tant $u=0$. Dans ce cas la limite supérieure de v ne peut plus être $\xi n'$ qui est $=0$; mais on a généralement $v<\xi^2\int_{-\lambda}^{\lambda}\psi(x)\,dx$ ou $v<\xi^2$. Ainsi, lorsque λ est égal à la valeur (5.) ou (6.), l'intervalle (7.) peut s'exprimer au moyen d'une petite extension comme suit:

$$\pm\frac{2(k+h)\xi z}{\sqrt{s}}.$$

Or suivant (3.) et (6.) on a à peu près $x=m(q-M)\theta+2mn\lambda\theta^2$, ce qui pour $\lambda=371{,}5$ donne $x=0{,}0001802\,(q-M)\theta+0{,}00000115144\theta^2$, d'où, en faisant $q-M=\pm 12$, $\theta=25$, on trouve $k=0{,}0547796$ et $h=0{,}0533404$, donc $2(k+h)\xi=0{,}0118455$. Soit par exemple $s=100$, $z=3$. On trouve la probabilité extrêmement petite

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^3 e^{-z^2}\,dz=0{,}0000221$$

pour que la différence des résultats moyens de 100 hauteurs barométriques observées et réduites tombe hors de l'intervalle

$$\pm\,0{,}00355.$$

Copenhague le 18 septembre 1840.

10.

Entwickelung einiger trigonometrischen Formeln durch Hülfe der Lehre von den Doppelschnitts-verhältnissen.

(Vom Hrn. *A. F. Möbius*, Professor in Leipzig.)

Bekannt ist die von *Euler* zuerst aufgestellte Formel

$$(A)\quad \frac{a^p}{(a-b)(a-c)\dots(a-m)}+\frac{b^p}{(b-a)(b-c)\dots(b-m)}+\dots$$
$$\dots+\frac{m^p}{(m-a)(m-b)\dots(m-l)}=0,$$

wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, die kleiner ist, als die um 1 verminderte Anzahl der Elemente $a, b, \dots l, m$ und auch null sein kann.

Wenn ich nicht irre, hat man auch bereits gefunden, dafs es eine, dieser algebraischen analoge, trigonometrische Formel giebt, die aus der erstern erhalten wird, wenn darin statt der einfachen Differenzen $a-b$, $a-c$, $b-c$, ... in den Nennern die Sinus derselben und statt der Potenzen von a, b, c, ... in den Zählern die Potenzen der Sinus oder Cosinus von a, b, c, ... gesetzt werden. Indessen dürfte die folgende Art und Weise, wie die trigonometrische Formel aus der algebraischen hergeleitet werden kann, neu sein und vielleicht einige Aufmerksamkeit verdienen.

Werde die Zahl p um zwei Einheiten geringer als die Zahl der Elemente angenommen und ihr somit ihr gröfstmöglicher Werth gegeben. Man ziehe nun fürs Erste den speciellen Fall in Betrachtung, wenn die Elementenzahl $=5$ und mithin $p=3$ ist. Die identische algebraische Formel ist alsdann:

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)}+\dots=0,$$

oder, wenn man statt a, b, c, ... resp. $a-x$, $b-x$, $c-x$, ... setzt:

$$\frac{(a-x)^3}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)}+\frac{(b-x)^3}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)}+\dots=0,$$

und wenn man das erste Glied in die übrigen dividirt:

$$(a) \ldots\ldots 1-(b)-(c)-(d)-(e)=0,$$

$$\text{wo} \quad (b)=\frac{(b-x)^2(a-c)(a-d)(a-e)}{(a-x)^2(b-c)(b-d)(b-e)},$$

$$(c)=\frac{(c-x)^2(a-b)(a-d)(a-e)}{(a-x)^2(c-b)(c-d)(c-e)}, \text{ u. s. w.}$$

Den Werth von (b) kann man aber auch ausdrücken durch

$$(b)=\left(\frac{b-x}{a-x}:\frac{b-c}{a-c}\right)\left(\frac{b-x}{a-x}:\frac{b-d}{a-d}\right)\left(\frac{b-x}{a-x}:\frac{b-e}{a-e}\right),$$

welches als ein Product aus 3 Doppelschnittsverhältnissen betrachtet werden kann. Dann nimmt man in einer Geraden l einen Punct Z willkürlich, und 6 andere X, A, B, C, D, E so, dafs (mit Rücksicht auf die Zeichen von $x, a, b, \ldots$)

$$ZX=x, \quad ZA=a, \quad ZB=b, \ldots\ldots \; ZE=e,$$

$$\text{so wird} \quad (b)=\left(\frac{XB}{XA}:\frac{CB}{CA}\right)\left(\frac{XB}{XA}:\frac{DB}{DA}\right)\left(\frac{XB}{XA}:\frac{EB}{EA}\right)$$

= dem Product aus den 3 Doppelschnittsverhältnissen, nach welchen eine und dieselbe Linie BA in X und C, in X und D, in X und E getheilt wird. (Baryc. Calc. §. 182.)

Ein Doppelschnittsverhältnifs hat aber die merkwürdige und sehr leicht erweisliche Eigenschaft, dafs sein Werth ungeändert bleibt, wenn statt der Linien-Abschnitte, die dasselbe bilden, die Sinus der Winkel gesetzt werden, welche die von einem beliebigen, aufserhalb der Geraden l gelegenen Puncte O nach den Endpuncten der Abschnitte gezogenen Geraden mit einander machen, und dafs hiernach z. B.

$$\frac{XB}{XA}:\frac{CB}{CA}=\frac{\sin XOB}{\sin XOA}:\frac{\sin COB}{\sin COA}.$$

Setzt man daher die (nach einer und derselben Seite gerechneten) Winkel, welche die Linien $OX, OA, OB, \ldots\ldots OE$ mit OZ machen, resp. $=\varphi, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, so ist

$$\frac{b-x}{a-x}:\frac{b-c}{a-c}=\frac{XB}{XA}:\frac{CB}{CA}=\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}:\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\alpha-\gamma)},$$

und eben so

$$\frac{b-x}{a-x}:\frac{b-d}{a-d}=\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}:\frac{\sin(\beta-\delta)}{\sin(\alpha-\delta)},$$

$$\frac{b-x}{a-x}:\frac{b-e}{a-e}=\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}:\frac{\sin(\beta-\varepsilon)}{\sin(\alpha-\varepsilon)}.$$

Hiermit wird

$$(b) = \frac{\sin(\beta-\varphi)^2 \sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sin(\alpha-\varphi)^2 \sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\delta)\sin(\beta-\varepsilon)},$$

und eben so findet sich

$$(c) = \frac{\sin(\gamma-\varphi)^2 \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\delta)\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sin(\alpha-\varphi)^2 \sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma-\delta)\sin(\gamma-\varepsilon)},$$

u. s. w. Man substituire nun diese Werthe von (b), (c), ... in der Gleichung (a), so kommt, nach Multiplication mit $\frac{\sin(\alpha-\varphi)^2}{\sin(\alpha-\beta)\ldots\sin(\alpha-\varepsilon)}$:

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)^2}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)\sin(\alpha-\varepsilon)} + \frac{\sin(\beta-\varphi)^2}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\delta)\sin(\beta-\varepsilon)} + \ldots = 0:$$

eine Gleichung, welche identisch sein mufs, da, eben so, wie die Gröfsen x, a, b, c, d, e, auch die Winkel Φ, α, β, γ, δ, ε von einander unabhängig sind.

Auf gleiche Weise zeigt sich, dafs bei einer beliebigen Anzahl n von Winkel-Elementen α, β, γ, ... μ, ν, wenn der Kürze wegen

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\nu)} = [\alpha],$$

$$\frac{1}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\nu)} = [b],$$

$$\ldots \quad \frac{1}{\sin(\nu-\alpha)\sin(\nu-\beta)\ldots\sin(\nu-\mu)} = [\nu]$$

gesetzt wird, die Gleichung Statt findet:

$$(O) \ldots [\alpha]\sin(\alpha-\Phi)^{n-2} + [\beta]\sin(\beta-\Phi)^{n-2} + \ldots + [\nu]\sin(\nu-\Phi)^{n-2} = 0.$$

Ist nun erstens n, und damit auch $n-2$, eine gerade Zahl, so läfst sich $\sin(\alpha-\Phi)^{n-2}$ in eine Reihe von der Form entwickeln:

$$\begin{aligned} &A + B\cos 2(\alpha-\Phi) + C\cos 4(\alpha-\Phi) + \ldots + N\cos(n-2)(\alpha-\Phi) \\ = &A + B\cos 2\alpha\cos 2\Phi + \ldots + N\cos(n-2)\alpha\cos(n-2)\Phi \\ &+ B\sin 2\alpha\sin 2\Phi + \ldots + N\sin(n-2)\alpha\sin(n-2)\Phi, \end{aligned}$$

wo A, B, C, ... N von $n-2$ auf bekannte Weise abhängige Zahlen bedeuten. Verfährt man auf dieselbe Art mit $\sin(\beta-\Phi)^{n-2}$, ... $\sin(\nu-\Phi)^{n-2}$ und substituirt alle diese Entwickelungen in (O), so kommt eine Gleichung von der Form

$$0 = A_1 + B_1 \cos 2\varphi + C_1 \cos 4\varphi + \dots + N_1 \cos(n-2)\varphi$$
$$+ B_2 \sin 2\varphi + C_2 \sin 4\varphi + \dots + N_2 \sin(n-2)\varphi,$$

welche für alle Werthe von φ bestehen mufs. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn alle die Coëfficienten A_1, B_1, B_2, C_1, C_2, ... N_1, N_2 einzeln null sind. Somit ergeben sich bei einer geraden Anzahl von Elementen die speciellen Formeln

$$[\alpha] + [\beta] + [\gamma] + \dots + [\nu] = 0,$$
$$[\alpha] {\cos \atop \sin} 2\alpha + [\beta] {\cos \atop \sin} 2\beta + \dots + [\nu] {\cos \atop \sin} 2\nu = 0,$$
$$[\alpha] {\cos \atop \sin} 4\alpha + [\beta] {\cos \atop \sin} 4\beta + \dots + [\nu] {\cos \atop \sin} 4\nu = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[\alpha] {\cos \atop \sin} (n-2)\alpha + \dots + [\nu] {\cos \atop \sin} (n-2)\nu = 0.$$

Ist dagegen n ungerade, so wird

$$\sin(\alpha-\varphi)^{n-2} = A' \sin(\alpha-\varphi) + B' \sin 3(\alpha-\varphi) + C' \sin 5(\alpha-\varphi) + \dots$$
$$\dots + N' \sin(n-2)(\alpha-\varphi),$$

woraus, durch den vorigen ganz analoge Schlüsse, die Formeln

$$[\alpha] {\sin \atop \cos} \alpha + [\beta] {\sin \atop \cos} \beta + \dots + [\nu] {\sin \atop \cos} \nu = 0,$$
$$[\alpha] {\sin \atop \cos} 3\alpha + [\beta] {\sin \atop \cos} 3\beta + \dots + [\nu] {\sin \atop \cos} 3\nu = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[\alpha] {\sin \atop \cos} (n-2)\alpha + \dots + [\nu] {\sin \atop \cos} (n-2)\nu = 0$$

hervorgehen. Ueberhaupt also hat man:

$$\text{I.} \quad [\alpha] {\sin \atop \cos} p\alpha + [\beta] {\sin \atop \cos} p\beta + \dots + [\nu] {\sin \atop \cos} p\nu = 0,$$

wo p absolut kleiner als n, und $n-p$ eine gerade Zahl ist.

Endlich sieht man leicht, wie hieraus, bei derselben Bestimmung von p, die Formel

$$\text{II.} \quad [\alpha] \left({\sin \atop \cos} \alpha\right)^p + [\beta] \left({\sin \atop \cos} \beta\right)^p + \dots + [\nu] \left({\sin \atop \cos} \nu\right)^p = 0$$

gefolgert werden kann.

Zusatz. Noch allgemeiner läfst sich die letztere Formel also darstellen:

$$\text{III.}\quad [\alpha]\,{\sin \atop \cos}(\alpha-\varphi)\,{\sin \atop \cos}(\alpha-\chi)\,{\sin \atop \cos}(\alpha-\psi)\ldots.$$
$$+[\beta]\,{\sin \atop \cos}(\beta-\varphi)\,{\sin \atop \cos}(\beta-\chi)\,{\sin \atop \cos}(\beta-\psi)\ldots. + \text{etc.}$$
$$+[\nu]\,{\sin \atop \cos}(\nu-\varphi)\,{\sin \atop \cos}(\nu-\chi)\,{\sin \atop \cos}(\nu-\psi)\ldots. = 0,$$

wo die Anzahl der Elemente φ, χ, ψ, ... gleich dem vorigen p, also um eine gerade Zahl kleiner ist, als die Anzahl der Elemente α, β, γ, ... ν.

Die Richtigkeit hiervon erhellet sogleich, wenn man die in $[\alpha]$, $[\beta]$, ... $[\nu]$ multiplicirten Producte aus Sinussen oder Cosinussen in Summen von Sinussen und Cosinussen der Vielfachen von α, β, ... ν verwandelt. Denn in der somit umgeformten Gleichung wird zufolge I. jede der Summen von Gliedern, welche Gleichvielfache von α, β, ... ν enthalten, für sich null sein.

Von der Formel III. läfst sich noch eine besondere Anwendung auf die Kugel machen. Seien A, B, C, ... n Puncte in einem gröfsten Kreise derselben, und P, Q, ... p Puncte, welche irgend aufserhalb des Kreises auf der Kugel liegen. Man fälle von letztern auf den Kreis die sphärischen Perpendikel PP', QQ', ... und setze die sphärischen Abstände der Puncte A, B, C, ... und P', Q', ... von einem im Kreise beliebig gewählten Anfangspuncte resp. $= \alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ und $\varphi, \chi, \ldots.$, so ist zufolge jener Formel:

$$\frac{\cos AP'.\cos AQ'\ldots.}{\sin AB.\sin AC.\sin AD\ldots.}+\frac{\cos BP'.\cos BQ'\ldots.}{\sin BA.\sin BC.\sin BD\ldots.}+\ldots. = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\cos PP'.\cos QQ'\ldots.$ und bemerkt, dafs $\cos AP'.\cos PP' = \cos AP$, $\cos AQ'.\cos QQ' = \cos AQ$, ... $\cos BP'.\cos PP' = \cos BP$, ... u. s. w., so kommt:

$$\frac{\cos AP.\cos AQ\ldots.}{\sin AB.\sin AC.\sin AD\ldots.}+\frac{\cos BP.\cos BQ\ldots.}{\sin BA.\sin BC.\sin BD\ldots.}+\ldots. = 0.$$

Insbesondere ist daher für $n=3$ und $p=1$:

$$\frac{\cos AP}{\sin AB.\sin AC}+\frac{\cos BP}{\sin BA.\sin BC}+\frac{\cos CP}{\sin CA\ \sin CB}=0$$

oder

$$\sin BC.\cos AP+\sin CA.\cos BP+\sin AB.\cos CP = 0\,^{*)}.$$

*) Nimmt man die Puncte A, B, C, P einander sehr nahe liegend an und berücksichtigt blofs die dritten Potenzen ihrer gegenseitigen Entfernungen, so wird $\sin BC \cos AP = (BC-\frac{1}{6}BC^3)(1-\frac{1}{2}AP^2) = BC-\frac{1}{2}BC.AP^2-\frac{1}{6}BC^3$, u. s. w.

Für $n=4$ und $p=2$ ist

$$\frac{\cos AP.\cos AQ}{\sin AB.\sin AC.\sin AD}+\frac{\cos BP.\cos BQ}{\sin BA.\sin BC.\sin BD}+\frac{\cos CP.\cos CQ}{\sin CA.\sin CB.\sin CD}$$
$$+\frac{\cos DP.\cos DQ}{\sin DA.\sin DB.\sin DC}=0.$$

Für $n=5$ kann man $p=1$ oder $=3$ setzen, u. s. w.

Bei der jetzt mitgetheilten Ableitung der trigonometrischen Formeln I. und II. aus der algebraischen (*A.*) wurde eine geometrische Betrachtung mit zu Hülfe genommen. Fände man dieses unstatthaft, da der Gegenstand der Untersuchung ein rein analytischer ist, so könnte man, ohne das Wesentliche des Beweises zu ändern, folgendergestalt zu Werke gehen.

Man drücke das Verhältnifs

$$\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d},$$

analog mit der in meinem baryc. Calcul (§. 183.) gebrauchten Bezeichnung durch (a, b, c, d) aus. Alsdann sind, wie dort (§. 184.), die drei aus (a, b, c, d) durch gegenseitige Vertauschung zweier neben einander stehender Buchstaben entspringenden Functionen:

$$1.\quad (b, a, c, d)=\frac{1}{(a, b, c, d)},$$

$$2.\quad (a, b, d, c)=\frac{1}{(a, b, c, d)},$$

$$3.\quad (a, c, b, d)=1-(a, b, c, d);$$

und hierdurch sind wir im Stande, nach und nach auch alle übrigen durch Permutation der vier Elemente a, b, c, d sich bildenden Functionen durch (a, b, c, d) auszudrücken.

Es ist ferner (§. 185.)

$$4.\quad (a, b, c, d)(a, b, e, c)=(a, b, e, d),$$

wodurch sich aus zwei Functionen, welche drei Elemente a, b, c gemein haben, das eine derselben c eliminiren, d. h. die aus den vier übrigen Ele-

---

Hiermit reducirt sich die obige Formel auf

$$BC.AP^2+CA.BP^2+AB.CP^2=-\tfrac{1}{3}(BC^3+CA^3+AB^3)=BC.CA.AB,$$

wegen $BC+CA+AB=0$: eine bekannte Relation bei einem System von drei Puncten A, B, C in einer Geraden und einem vierten P aufserhalb derselben.

menten gebildete Function finden läfst, und dieses mit Hülfe der Formeln (1.), (2.) und (3.); auch in dem Falle, wenn die Aufeinanderfolge der Elemente in den zwei gegebenen Functionen irgend anders, als in (4.), ist.

Es folgt hieraus weiter, dafs man, wenn drei Functionen gegeben sind, welche dieselben drei Elemente a, b, c gemein haben, z. B.

$$(a, b, c, d) = D, \quad (a, b, c, e) = E, \quad (a, b, c, f) = F,$$

aus ihnen zwei dieser Elemente, etwa b und c, eliminiren und damit (a, d, e, f) durch D, E, F darstellen kann. Ist noch die vierte Function

$$(a, b, c, g) = G$$

gegeben, so wird man noch a eliminiren und damit (d, e, f, g) durch D, E, F, G ausdrücken können. In der That findet sich

$$(d, e, f, g) = (D, E, F, G) \quad (\S.\ 186.).$$

Sind folglich bei n Gröfsen a, b, c, d, e, f, ... die $n-3$ Functionen D, E, F, ... gegeben, deren jede die drei ersten a, b, c und je eine der $n-3$ übrigen Gröfsen d, e, f, ... zu Elementen hat, so wird man aus diesen offenbar von einander unabhängigen Functionen alle übrigen, welche sich aus vier der n Gröfsen bilden lassen, bestimmen können (§. 187.): und dieses blofs durch wiederholte Anwendung des durch die vier Formeln (1.), ... (4.) ausgedrückten Algorithmus.

Hat man folglich irgend eine identische Gleichung zwischen irgend welchen der aus a, b, c, d, e, f, ... gebildeten Functionen, und setzt man darin statt der letztern ihre durch D, E, F, ... ausgedrückten Werthe, so mufs die somit zwischen D, E, F, ... hervorgehende Gleichung ebenfalls eine identische sein, indem sonst durch sie eine Abhängigkeit zwischen den von einander unabhängigen D, E, F, ... ausgedrückt werden würde. Ohne daher etwas Näheres von der Art zu wissen, wie die durch (a, b, c, d) dargestellte Function aus a, b, c, d zusammengesetzt sei, reicht der gedachte Algorithmus allein hin, um jede Gleichung zwischen solchen Functionen, wenn sie identisch ist, als solche zu beweisen.

Wenn folglich bei einer, auf irgend andere Weise aus vier Elementen zusammengesetzten Function die Relationen (1.), .. (4.), welche jenen Algorithmus begründen, gleichfalls Statt finden, so mufs jede Gleichung zwischen Functionen der ersteren Art, wenn sie eine identische ist, identisch bleiben, wenn statt der ersteren die der anderen Art substituirt werden.

Solch eine andere Function von vier Elementen a, b, c, d ist aber

$$\frac{\sin(a-c)}{\sin(b-c)} : \frac{\sin(a-d)}{\sin(b-d)}.$$

Denn bezeichnet man dieselbe durch $[a, b, c, d]$, so ist ersichtlich

$$[b, a, c, d] = [a, b, d, c] = \frac{1}{[a, b, c, d]}.$$

Sodann ist

$$[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d],$$

weil $\sin(a-b)\sin(c-d) + \sin(a-c)\sin(d-b) + \sin(a-d)\sin(b-c) = 0$.

Auch hat man

$$[a, b, c, d][a, b, e, c] = [a, b, e, d].$$

Jede identische Gleichung zwischen Functionen der ersten Art, (a, b, c, d) etc. wird mithin identisch bleiben, wenn man statt derselben die Functionen $[a, b, c, d]$ etc. substituirt.

Nun war in der identischen Gleichung

$$(\alpha) \quad 1 = (b) + (c) + (d) + (e)$$

jedes der vier Glieder (b) .... (e) ein Product aus Functionen der ersten Art, nämlich

$$(b) = (b, a, x, c)(b, a, x, d)(b, a, x, e),$$
$$(c) = (c, a, x, b)(c, a, x, d)(c, a, x, e)$$

u. s. w. Mithin muſs auch die Gleichung

$$1 = [b] + [c] + [d] + [e],$$

worin

$$[b] = [b, a, x, c][b, a, x, d][b, a, x, e] \text{ etc.}$$

ist, eine identische sein. — Das Uebrige folgt hieraus auf die bereits gezeigte Weise.

11.

Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général.

(Par *J. Steiner*, membre de l'Academie de Berlin.)

Premier mémoire.*)

(Extrait du Journal des Mathématiques pures et appliquées de Mr. *Liouville*, tom. VI.) **)

On ne s'est pas assez appliqué jusqu'ici à vaincre les difficultés qui se présentent quand on recherche les propriétés des figures géométriques qui donnent lieu à des *maxima* et à des *minima*, ou du moins on n'a pas été heureux dans les tentatives faites dans cette direction. Or il existe deux méthodes pour traiter cette matière: l'une d'elles, la méthode synthétique, réputée insuffisante, a été de nos jours presque entièrement négligée; on ne s'est guère occupé que de l'autre, de la méthode analytique, que l'on croyait préférable sous tous les rapports. Mais il y a bien des cas où les règles générales que l'analyse fournit ne conduisent ni directement, ni facilement au but; il y en a d'autres où elle ne paraît pas propre à faire découvrir la cause, l'origine du maximum et du minimum; elle ne s'attache alors qu'à des propriétés secondaires, qui sont liées plus ou moins intimement à cette cause primitive, mais qui ne la constituent pas. Il semble donc utile de changer de route et de recourir à l'ancienne méthode, mal à propos abandonnée.

Quoiqu'il soit impossible d'établir un principe unique applicable également à toutes les matières que nous aurons à traiter, on verra pourtant qu'il existe un certain nombre de propriétés fondamentales, d'où découlent autant de séries de théorèmes, intimement liés les uns aux autres. C'est

---

*) Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences de Paris le 15 mars 1841: l'auteur l'a composé en langue allemande; nous devons à l'obligeance de M. le docteur *Wertheim* la traduction qu'on imprime ici. (J. L.)

**) *Le second mémoire faisant suite au premier, qui a été imprimé dans le journal de math. de Mr. Liouville, sera publié (pour la première fois), dans un des prochains numéros de ce journal.* (C.)

ainsi qu'on est souvent conduit à des théorèmes qui ne sauraient être démontrés qu'avec une très grande difficulté, quand on les attaque isolément par la voie directe; par exemple, les théorèmes des n[os] 62 et 65 du Mémoire qui suit. Les propriétés fondamentales une fois établies, les théorèmes en dérivent, pour ainsi dire, comme d'une source commune, qui laisse apercevoir leur dépendance mutuelle, ce que nous considérons comme tout aussi important, tout aussi utile pour le progrès des sciences, que la découverte même des théorèmes.

On doit à *Lhuilier* *) les recherches les plus étendues sur les *maxima* et *minima* dans la Géométrie envisagés sous un point de vue élémentaire; la méthode synthétique lui a semblé mieux convenir à ce genre de recherches. En résumant tout ce que ses devanciers avaient découvert, à partir des Grecs jusqu'à *R. Simson* et autres, il a corrigé, avec sa sagacité ordinaire, tout ce qui s'y trouvait de faux, et il a fait faire lui-même un grand pas à cette partie de la science. Il est bien à regretter que ses successeurs aient cru devoir abandonner cette marche si naturelle; on cite bien quelquefois son ouvrage, on lui emprunte même quelques exemples, mais on néglige entièrement sa méthode; et ceux mêmes qui tenaient encore à la synthèse géométrique (*Legendre, Hirsch*, etc.), tout en conservant ses théorèmes, ont rejeté les démonstrations simples qu'il en avait données. Mais il est arrivé de là aussi que la belle simplicité, l'extrême élégance des démonstrations s'est bientôt perdue, que l'on a cessé d'apercevoir la liaison intime qui subsiste entre les théorèmes, et que tout développement ultérieur de cette doctrine a été ainsi arrêté. Bien plus, séduits par la facilité que donne le calcul pour résoudre certaines classes de questions relatives aux *maxima* et *minima*, quelques géomètres ont même conseillé l'abandon entier de la synthèse, pour se livrer uniquement à la voie plus facile de l'analyse. Mais c'était exagérer dans un sens, comme *Lhuillier* lui-même l'avait fait dans l'autre, quand il prétendait que beaucoup de théorèmes ne pouvaient pas être démontrés au moyen du Calcul différentiel. Nous croyons que les deux méthodes, bien loin de s'exclure et de se repousser mutuellement, sont au contraire indispensables pour vaincre les grandes difficultés de la matière, et conduire ainsi à la solution des nom-

---

*) *De relatione mutuâ capacitatis et terminorum figurarum*, etc. *Varsoviae*, 1782; et *Abrégé d'Isopérimétrie élémentaire*, etc.

breux problèmes qui restent encore à traiter; une fois le but atteint, il sera toujours temps de comparer entre elles ces deux méthodes et les services qu'elles auront pu rendre.

Aucune branche de la Géometrie ne paraît soumise en effet à autant de difficultés que celle dont il s'agit: quand on croit avoir trouvé une méthode directe et générale, on rencontre à l'improviste, à côté de problèmes très simples, des problèmes qu'elle aborde à peine ou même qu'elle ne peut pas résoudre; et ici le succès dépend tellement du point de vue auquel on se place, que souvent des difficultés qui paraissent insurmontables par certains moyens, disparaissent dès qu'on les attaque par un autre en quelque sorte trivial. Tel est, par exemple, le théorème du n° 24, relatif aux figures sphériques. Et ceci est également vrai pour des systèmes entiers de propositions comme pour des théorèmes isolés.

Je pense avoir choisi la route la plus avantageuse pour certaines classes de *maxima* et *minima;* car je suis parvenu à des théorèmes fondamentaux, d'où un grand nombre de solutions découlent d'une manière élégante et facile; mais il est bien des questions, principalement parmi celles relatives aux figures dans l'espace, dont la solution m'a échappé et semble exiger des moyens nouveaux. C'est pour ce cas surtout que les deux méthodes se réuniront avec avantage; la méthode synthétique aura à fournir des bases solides, à établir les théorèmes fondamentaux, à montrer enfin à l'analyse le chemin qu'elle doit suivre pour pouvoir déployer librement toute sa force, et pour discuter ultérieurement les questions proposées; aussi est-ce là la marche que l'on a généralement suivie sans toujours l'avouer.

J'ai déjà publié plusieurs extraits de mes recherches concernant les *maxima* et *minima* en géométrie *). Le Mémoire suivant a pour objet les relations entre les aires et les périmètres des figures dans le plan et sur la sphère; il a trait à la première des cinq méthodes que j'ai suivies dans ces recherches, et qui toutes sont applicables aux figures planes. Quoique ces cinq méthodes ne diffèrent que par la marche des raisonnements qui conduisent au théorème principal, on ne peut pourtant se passer de leur concours commun, car tel théorème qui s'offre de lui-même, quand

*) Voyez le *Journal* de Mr. *Crelle,* et les *Mémoires de l'Académie de Berlin;* les extraits de quelques Mémoires inédits se trouvent aussi dans les *Comptes rendus* de cette Académie.

on suit l'une des méthodes, ne pourrait être trouvé par aucune des autres qu'avec la plus grande difficulté. La seconde de ces cinq méthodes s'applique également aux figures sphériques; mais nous serons obligés de recourir aux trois dernières pour traiter le cas de l'espace d'une manière en quelque sorte analogue.

La première méthode consiste à établir d'abord deux théorèmes fondamentaux de la plus grande simplicité, et d'où découle un théorème que nous nommerons *principal,* parce qu'il sert de base à tout ce qui suit: on verra par-là qu'il existe une liaison particulière et intime entre les figures susceptibles d'un maximum ou d'un minimum, notamment qu'elles entrent comme parties constitutives de la figure à laquelle le théorème principal se rapporte, et que les fondements sur lesquels celui-ci repose peuvent également servir à en démontrer d'autres beaucoup plus compliqués, et bien plus difficiles en apparence.

Des figures planes et sphériques.

§. I. *Théorèmes fondamentaux sur les figures planes.*

1. *Lemme.* Les sommets de tous les triangles isoscèles construits sur la même base, se trouvent sur la droite qui passe par le milieu de la base et qui est perpendiculaire sur elle; de deux quelconques de ces triangles, celui qui a le plus grand périmètre a aussi la plus grande aire, et réciproquement.

2. *Lemme.* Les surfaces de tous les triangles construits sur la même base sont entre elles comme leurs hauteurs, et réciproquement. Lorsque les triangles sont équivalents, les sommets sont sur une droite parallèle à la base.

Premier théorème fondamental.

3. 1°. *Entre tous les triangles isopérimètres et de même base le triangle isoscèle est un maximum.*

2°. *De deux de ces triangles, celui qui aura l'angle le plus petit ou le plus grand à la base, ou bien dont l'un des côtés sera le plus petit ou le plus grand, sera le plus petit lui-même, et réciproquement.*

Démonstration. 1°. Soient le triangle isoscèle ACB et le non isoscèle ADB (*Planche I, fig.* 1), construits sur la même base AB, et soit en même temps $AC+BC=AD+BD$; puisqu'il y a toujours une partie

AEB, qui est commune aux deux triangles, le théorème sera démontré quand on aura prouvé que l'on a triangle $AEC > BED$.

L'angle α est égal à l'angle β, donc on a $\beta > \gamma$ et $AE > BE$. Faisons $EF = EB$, et prenons sur la ligne *EC*, $EG = ED$; je dis que le point *G* doit nécessairement tomber entre *C* et *E*. Car supposons que *G* tombât en *C*, alors *ED* étant égal à *EC*, les deux triangles *BED* et *FEC* seraient égaux, d'où résulterait $FC = BD$; en même temps la ligne *DF* serait égale à *BC*; donc (puisque par hypothèse $AC + BC = AD + BD$) on aurait $BD + AF = FC + AF = AC$, c'est-à-dire que la somme de deux côtés d'un triangle serait égale au troisième, ce qui est impossible. Le point *G* peut encore moins tomber au-delà de *C*, par exemple en *H*; car on aurait alors, par les mêmes raisons, $AF + FH + HC = AC$, c'est-à-dire que la ligne brisée *AFHC* serait égale à la droite *AC*. Donc le point *G* doit tomber entre *E* et *C*. Cela étant, on a triangle $FEG = BED$; donc triangle $AEC > BED$; donc aussi le triangle isoscèle *ACB* est plus grand que le triangle non isoscèle *ADB*.

2°. Soient *ACB*, *ADB* (*fig.* 2) deux triangles isopérimètres quelconques de même base; désignons par γ le plus petit des quatre angles à la base, ce qui exige que $\gamma < \beta$; nous pourrons démontrer comme nous venons de le faire (1°.) que triangle $ADB < ACB$, c'est-à-dire que le triangle qui a le plus petit angle à la base est le plus petit. — On peut prouver de même que le triangle *ADB* est plus petit que le triangle *ACB*, quand on suppose que δ est le plus grand des angles, ou que *BD* est le plus petit des côtés, ou enfin que *AD* est le plus grand des côtés. Pour cela il suffit de démontrer que l'hypothèse précédente $\gamma < \beta$ entraîne nécessairement ces trois conditions. Pour prouver que δ est le plus grand des angles, c'est-à-dire pour prouver qu'on a $\delta > \alpha$, retournons le triangle *ADB* de manière à lui faire prendre la position AD_1B dans laquelle les angles γ et δ tomberont en γ_1 et δ_1, on aura $\gamma = \gamma_1$, $\delta = \delta_1$; le sommet D_1 doit nécessairement tomber au-delà du côté *AC*, puisqu'on a $\beta > \gamma_1$ $(= \gamma)$, d'après cela on voit que δ_1 sera plus grand que α, donc $\delta > \alpha$. Pour prouver que *BD* est le *plus petit* et *AD* le *plus grand* des quatre côtés, j'observe que *AD* ne peut être ni égal à *AC*, ni plus petit que *AC*, en sorte qu'il faudra que *AD* soit plus grand que *AC* et par suite $BD < BC$. D'abord si l'on admettait que *AD* fût égal à *AC*, alors *BD* serait égal à *BC*, et le triangle *ADB* serait égal au triangle *ACB*, ce qui est impos-

sible. En second lieu, si l'on avait $AD < AC$, il en résulterait $BD > BC$, et dans le triangle ACD l'angle ACD devrait être plus petit que l'angle ADC; en même temps dans le triangle BCD on aurait angle $BCD > BDC$, ce qui est impossible. Il s'ensuit que $AD > AC$ et $BD < BC$. On démontrerait de la même manière que l'on a $BD_1 > BC$, $AD_1 < AC$, ou bien $AD > BC$, $BD < AC$. Il est donc prouvé qu'en effet BD est le plus petit et AD le plus grand des quatre côtés. — On prouverait par une démonstration semblable que réciproquement chacune de ces trois conditions entraine la première, savoir, $\gamma < \beta$, et par suite, triangle $ADB < ACB$, et que de même l'existence de ces quatre relations est une conséquence nécessaire de la supposition triangle $ADB < ACB$.

On voit que la seconde partie du théorème (2°.) renferme comme un cas spécial la première (1°.), qui est l'énoncé du maximum. Chacune de ces parties nous sera utile dans la suite.

4. *Entre tous les triangles de même base et de même surface, le triangle isoscèle est celui qui a le plus petit périmètre.*

Démonstration. Soit G le triangle isoscèle et U un triangle non isoscèle quelconque de même base et de même surface; designons par G_1 un autre triangle isoscèle, construit sur la même base, et dont le périmètre soit égal à celui de U: on aura (3) $G_1 > U$, et (puisque $U = G$), $G_1 > G$; donc (1) périmètre $G_1 >$ périmètre G, ou bien périmètre $U >$ périmètre G.

5. *Entre tous le triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est un maximum, et réciproquement: entre tous les triangles de même surface le triangle équilatéral a le plus petit périmètre.*

1re *Démonstration.* Le triangle maximum correspondant au périmètre donné doit toujours être isoscèle, que l'on prenne tel ou tel de ses côtés pour base; donc ses côtés pris deux à deux doivent être égaux; donc les trois côtés sont égaux entre eux.

Cette démonstration ne laisse à la vérité rien à desirer sous le rapport de la justesse et de la rigueur; mais elle est incomplète en ce qu'elle ne montre pas clairement aux yeux pourquoi deux triangles de même périmètre étant donnés, dont l'un est équilatéral, l'autre non équilatéral, le premier est plus grand que le second. Pour remédier à cet inconvénient, *Lhuilier* a donné une démonstration par laquelle on s'approche de plus en plus du triangle équilatéral, en transformant indéfiniment le triangle non équilatéral donné en triangles isoscèles de même périmètre; mais cette dé-

monstration n'est pas non plus absolument satisfaisante. J'ai tâché de combler cette lacune par la démonstration suivante:

2me *Démonstration.* Soit donnée un triangle non isoscèle quelconque U; construisons sur le côté le plus grand, pris pour base, un triangle isoscèle G de même périmètre; on aura (3) $G > U$: représentons ce triangle G par ABC (*fig.* 3). Par hypothèse la base AB est plus grande et chacun des côtés AC et BC plus petit que le tiers du périmètre. Soit donc la partie BD de la base égale au tiers du périmètre; prenons sur le prolongement du côté adjacent BC le point E tel que le triangle DEB soit isopérimètre au triangle ACB; on aura $DE + EC = AD + AC$ (puisque BD et BC appartiennent aux deux périmètres). BC étant plus petit que le tiers du périmètre, il s'ensuit $BD > BC$ et l'angle x plus grand que l'angle y, ensuite angle $ADC > ECD$, d'où triangle $ECD > ADC$ (3, 2°.), et enfin $DEB > ACB$, ou triangle DEB plus grand que triangle G. Soit maintenant le triangle DFB équilatéral et par suite ayant un périmètre égal à celui de DEB (ou G et U) dont BD est le tiers; alors on a triangle $DFB > DEB$ (3), donc $DFB > G$, et *à fortiori* $DFB > U$. — Cette démonstration est directe et rigoureuse en même temps.

Le théorème réciproque se démontre facilement par voie indirecte, comme le précédent, ou bien il peut être déduit de celui-ci:

Second théorème fondamental.

6. ***Entre tous les triangles construits avec deux côtés donnés, celui dans lequel ces deux côtés seront perpendiculaires l'un à l'autre sera un maximum.***

Démonstration. Si l'on prend l'un des côtés donnés pour base, la surface du triangle augmente quand la hauteur augmente; or celle-ci est la plus grande possible, quand elle est égale à l'autre côté donné, c'est-à-dire quand ce côté est perpendiculaire à la base.

Il y a une démonstration de ce théorème plus analogue à celle qui concerne les triangles sphériques (14). La voici:

Soit AB (*fig.* 4) l'un des côtés donnés pris pour base fixe; les sommets de tous les triangles que l'on peut construire avec les côtés données, sont situés dans un cercle FCG, qui a le point A pour centre et l'autre côté AC pour rayon; tirons les droites FG, DE, ... parallèlement à la base AB; elles rencontreront en général le cercle en deux points.

Ces points de rencontre sont les sommets de deux triangles équivalents, construits avec les côtés donnés, par exemple des triangles *ADB* et *AEB*; l'aire de ces triangles devient d'autant plus grande que la parallèle est plus éloignée de la base, et il est clair que cette distance est la plus grande possible quand la parallèle est tangente en *C*; mais, dans ce cas, il n'y a qu'un seul triangle *ACB*: dans ce triangle, qui est un maximum, les côtés donnés *AB* et *AC* sont perpendiculaires l'un à l'autre.

7. *Entre tous les triangles dont la somme de deux côtés est donnée, celui dans lequel ces deux côtés sont égaux et perpendiculaires l'un à l'autre est un maximum.*

Démonstration. Que l'on répartisse la somme donnée, comme l'on voudra, sur les deux côtés, le triangle maximum sera toujours celui qui aura ces deux côtés perpendiculaires l'un à l'autre (6); il ne reste donc qu'à démontrer que le triangle isoscèle est le plus grand de tous ces triangles rectangles. Imaginons pour cela un triangle isoscèle construit sur l'hypoténuse de l'un de ces triangles rectangles non isoscèles, et dont la somme des côtés soit la même; il sera plus grand que le triangle non isoscèle, mais plus petit que le triangle isoscèle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont égaux à ses côtés.

Remarquons encore que le produit de deux parties d'une droite donnée est le plus grand possible, quand ces parties sont égales, ou que le rectangle est le plus grand des parallélogrammes à côtés donnés, et qu'entre tous les rectangles de même périmètre le carré est un maximum.

§. II. *Théorèmes fondamentaux pour les figures sphériques.*

8. *Lemme.* Les sommets de tous les triangles sphériques isoscèles de même base se trouvent sur le grand cercle, qui est perpendiculaire à la base en son milieu; de deux quelconques de ces triangles celui qui a le plus grand périmètre est le plus grand, et réciproquement.

9. *Lemme.* L'aire d'un triangle sphérique de base donnée est d'autant plus petite ou plus grande que le cercle qui passe par son sommet et par les points diamétralement opposés aux extrémités de sa base, est plus ou moins incliné sur cette base (c'est-à-dire selon que l'angle formé par ce cercle et la base est plus petit ou plus grand). Il s'ensuit que les sommets de tous les triangles de même surface se trouvent sur un même cercle,

et réciproquement*), et que tout autre triangle a une aire plus petite ou plus grande que ceux-ci, selon que son sommet se trouve dans l'espace compris entre la base et le cercle, ou bien au-delà de ce cercle.

10. *Lemme.* Quand des cercles se touchent sur la surface de la sphère, leur point de contact se trouve sur le même grand cercle avec leurs pôles, de manière que le grand cercle qui passe par deux de ces points, passe nécessairement par le troisième.

Premier théorème fondamental.

11. I. *Entre tous les triangles sphériques de même base et de même périmètre, le triangle isoscèle est un maximum.*

II. *Entre deux de ces triangles, celui qui a l'angle le plus petit ou le plus grand à la base, ou dont l'un des côtés est le plus petit ou le plus grand, est le plus petit lui-même, et réciproquement.*

La démonstration de ce théorème ressemble parfaitement à celle du théorème analogue (3); on n'a qu'à remarquer que les triangles sphériques correspondants aux triangles plans *BED* et *FEG* (*fig.* 1) ne sont pas égaux, mais symétriques; ce qui ne nuit en rien au raisonnement (deux triangles symétriques peuvent toujours d'ailleurs être divisés en parties

*) Voyez le Tome II, page 45 de ce Journal. — L'histoire de ce théorème présente une singularité assez remarquable. Du à *Lexell*, ce théorème n'a été généralement connu que par les *Eléments de géometrie* de *Legendre* qui, tout en l'attribuant à *Lexell* ne le donne que d'une manière incomplete et parait avoir été suivi par tous les auteurs qui en ont parlé après lui. Ayant été conduit dans le Mémoire cité à reconnaître: „*que le petit cercle lieu des sommets de tous les triangles équivalents construits sur la même base passe toujours par les deux points diamétralement opposés aux extrémites de la base,*" je devais donc croire que ce complement indispensable pour les applications que j'avais en vue, n'était pas connu, et je fus confirmé dans cette erreur par tous ceux qui s'occupèrent plus tard du même sujet. Ce n'est que récemment que Mr. *Liouville,* qui avait rendu compte du présent Mémoire à l'Académie des sciences de Paris, ayant eu l'idée de recourir au Mémoire original de *Lexell* (Nova acta Petrop. Tom. V. pars prima) a reconnu que la proposition dont il s'agit y est énoncée d'une manière complète et démontrée de deux manières différentes. On ne saurait deviner ce qui a pu porter *Legendre* à mutiler le théorème donné par *Lexell* et l'on doit être d'autant plus surpris que cette circonstance soit restée si longtemps inaperçue, que la même proposition a fait le sujet d'un Mémoire d'*Euler* (Nova acta Tom. X.) où elle se trouve demontrée d'une manière très élegante, et purement géométrique. J'ajouterai que la démonstration donnée par cet illustre géomètre a beaucoup d'analogie avec celle que j'ai indiquée lors de la première publication du présent Mémoire dans le Journal de Mr. *Liouville* et qui est fondée sur des considérations qui appartiennent à la géométrie à trois dimensions.

égales). Cette remarque servira de même pour les cas suivants, dans lesquels une différence pareille se fait remarquer.

12. *Entre tous les triangles sphériques équivalents et de même base, le triangle isoscèle a le plus petit périmètre.*

La démonstration de ce théorème est conforme à celle du théorème analogue donnée ci-dessus (4).

13. *Entre tous les triangles sphériques de même périmètre, le triangle équilatéral est un maximum; et entre tous les triangles sphériques équivalents, le triangle équilatéral a le plus petit périmètre.*

Les démonstrations données ci-dessus (5) sont pareillement applicables à ce théorème.

Second théorème fondamental.

14. *Le triangle maximum entre ceux que l'on peut construire avec deux côtés donnés, est celui dans lequel l'angle des deux côtés est égal à la somme des angles à la base, ou dans lequel la base est un diamètre du cercle circonscrit.*

Démonstration. Prenons l'un des côtés donnés, par exemple AC (*fig.* 5) pour base fixe; alors le lieu géométrique des sommets des triangles sera un cercle DBE, dont A est le pôle et dont le rayon sphérique est égal à l'autre côté donné AB. Soient A_1 et C_1 les pôles respectivement opposés à A et C. Chacun des cercles qui passent par A_1 et C_1 est le lieu géométrique des sommets d'un système de triangles équivalents, construits sur la base AC (9); s'il rencontre le cercle fixe A en deux points D, E, ces deux points seront les sommets de deux triangles ADC et AEC, qui sont équivalents et ont pour côtés les côtés donnés. Remarquons en passant qu'il s'ensuit: *qu'à chacun des triangles qui peuvent être construits avec les côtés donnés correspond en général un second triangle équivalent.* L'aire augmente à mesure que le cercle, lieu géométrique, est moins incliné sur le plan de la base AC; or ce cercle doit d'ailleurs rencontrer le cercle fixe A; il fera donc avec la base le plus grand angle possible quand il ne touchera le cercle fixe qu'en un seul point B; donc le triangle ABC est un maximum entre tous les triangles qui ont les mêmes côtés donnés. Le pôle F du cercle tangent se trouve sur le prolongement du côté AB (10). Puisque $FA_1 = FB = FC_1$, on aura, dans le triangle A_1BC_1, $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$; mais on a $\alpha + \alpha_1 = \gamma + \gamma_1 = \pi$ (parce que α_1, γ_1 sont égaux aux

angles supplémentaires de α et γ) et $\beta_1 = \beta$; donc

$$\alpha = \beta + \gamma,$$

c'est-à-dire que dans le triangle maximum ABC, l'angle α qui est formé par les deux côtés donnés AB et AC est égal à la somme des deux autres angles $\beta + \gamma$, ce qui était d'abord à démontrer. Ensuite divisez l'angle α au moyen d'un grand cercle AG, de manière qu'on ait $BAG = \beta$, $CAG = \gamma$; alors on a $AG = BG = CG$, donc G est le pôle et BC le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC, ce qui démontre la seconde partie du théorème.

15. *La somme des deux côtés d'un triangle sphérique étant donnée, le triangle maximum est celui qui a ses côtés égaux et formant entre eux un angle égal à la somme des deux autres angles.*

La démonstration de ce théorème est parfaitement semblable à celle du théorème analogue sur les triangles plans (7). On pourrait de même ajouter des corollaires analogues sur les quadrilatères sphériques.

§. III. *Théorèmes plus généraux concernant les figures planes et sphériques.*

Remarque préliminaire générale.

16. Nous venons de montrer, en ce qui concerne les triangles plans et sphériques, combien il est facile d'énoncer les théorèmes d'une manière analogue et de mettre les démonstrations en parfait accord; cela sera tout aussi simple pour les théorèmes et les démonstrations concernant les autres figures. Seulement, pour plus de brièveté, nous énoncerons dans la suite en même temps, et les théorèmes sur les figures planes, et ceux sur les figures sphériques, ou du moins on y suppléera par la pensée toutes les fois que les expressions ne conviendront qu'aux figures planes. J'ai même tâché d'arranger les démonstrations de manière à ce qu'elles puissent servir indistinctement, et presque sans changer d'expressions, pour les figures planes et sphériques; mais partout où il y avait une différence essentielle, je n'ai pas manqué de l'indiquer, et de la discuter même. Pour mieux saisir l'origine générale de ces différences, remarquons, dès à présent, quelques-unes des propriétés des figures sphériques et une relation particulière qui existe entre elles.

I. Le périmètre d'un polygone sphérique convexe est, en général, plus petit que le grand cercle qui est sa limite; de même (la sphère étant donnée) l'aire ou la somme des angles de ce polygone ne peut pas devenir

aussi grande que l'on voudra; mais elle a la demi-surface de la sphère pour limite. Or si l'on veut prendre indistinctement pour l'aire du polygone l'une ou l'autre des parties dans lesquelles la surface de la sphère est divisée par sa circonférence, on aura la surface entière de la sphère pour limite de surface. Mais dans le cas où l'on prendrait l'aire de la plus grande partie, le polygone ne serait plus convexe, mais concave; c'est pourquoi l'on ne s'occupe, en général, que de l'aire de la plus petite partie. Cependant ces deux parties sont liées entre elles de manière que, l'une d'elles étant donnée, l'autre est connue, et que, l'une devenant un maximum sous certaines conditions, l'autre sera en même temps un minimum. Tout ce que nous venons de dire sur les polygones est pareillement vrai pour les courbes convexes et fermées.

II. Les figures polaires fournissent des réciproques à tous ces théorèmes: pour chaque théorème qui s'applique, sous certaines conditions, aux côtés et aux angles, au périmètre et à l'aire, etc., d'un polygone de n côtés, il y a toujours pour le polygone polaire un certain théorème correspondant, qui dépend du premier et qui s'obtient en substituant, tant dans les données de la question que dans les propriétés dérivées, un côté à un angle, le périmètre contre l'aire, le maximum au minimum, etc. [*]. Mais nous ne ferons dans la suite aucun usage de cette loi de réciprocité, parcequ'elle ne s'applique pas également aux figures planes. Nous n'indiquerons que la propriété suivante qui en découle.

Il y a une certaine relation constante entre le périmètre de l'une et l'aire de l'autre de deux figures polaires sphériques, laquelle relation sert à trouver une quelconque de ces deux quantités, quand l'autre est donnée. Elle consiste en ce que, si l'on prend la quatrième partie d'un grand cercle (le quadrans) pour unité de longueur et la huitième partie de la surface de la sphère (l'octant) pour unité de surface, que l'on désigne ensuite par u le périmètre de l'une de ces figures et par f la surface de l'autre, exprimées au moyen de ces unités: alors on aura toujours

$$u + f = 4.$$

[*]) C'est ainsi que l'on peut déduire immédiatement du théorème (11) les théorèmes suivants:

I. *Entre tous les triangles équivalents qui ont le même angle au sommet, celui qui a des angles égaux à la base possède un périmètre minimum.*

II. *De deux de ces triangles, celui qui a le côté le plus grand ou le plus petit, ou dont l'un des angles à la base est le plus grand ou le plus petit, aura de même un plus grand périmètre, et réciproquement.*

c'est-à-dire que *pour deux figures sphériques polaires la somme du périmètre (u) de l'une d'elles et de l'aire (f) de l'autre est égal à quatre.*

Les corollaires suivants découlent de cette loi:

Quand l'une des deux quantités u et f devient un maximum ou un minimum, l'autre devient en même temps un minimnm ou un maximum.

Quand la rectification ou la quadrature d'une courbe sphérique peut être exécutée, alors la courbe polaire est respectivement carrable ou rectifiable, et dans le cas contraire elle ne l'est pas.

En rectifiant ou en carrant l'une de ces courbes, on obtient simultanément l'aire ou le périmètre de l'autre, etc.

Théorème principal.

17. *Entre toutes les figures isopérimètres planes (ou sphériques), le cercle est un maximum;* et reciproquement *entre toutes les figures planes équivalentes, le cercle a le plus petit périmètre.*

Démonstration. Il est clair qu'il y a une infinité de figures d'un périmètre donné qui ont diverses formes et diverses aires. On comprend de même que l'aire pourra devenir aussi petite qu'on voudra, mais non pas aussi grande qu'on voudra, puisqu'elle reste évidemment toujours comprise dans l'intérieur du cercle décrit d'un des points de son contour comme centre avec un rayon égal à la moitié du périmètre donné. Mais puisque des figures de périmètre donné peuvent avoir différentes aires, sans pouvoir toutefois grandir indéfiniment, il faut qu'il y ait entre elles *une* figure maximum ou *plusieurs* maxima de différentes formes, c'est-à-dire plusieurs figures de différentes formes et d'une même aire, plus grande que celle des autres figures. Remarquons encore *qu'une figure dont l'aire peut être agrandie sans changer de périmètre, n'est pas un des maxima.* Il s'ensuit que chaque figure maximum est convexe, et qu'elle ne peut pas avoir de lignes droites dans son périmètre, ou du moins qu'il n'y a pas deux lignes droites consécutives, car elle pourrait encore devenir plus grande dans chacun de ces deux cas.

Soit *EFGH* (*fig.* 6) une des figures maxima. A chaque point *A* du périmètre correspond un second point *B*, placé de manière que ces deux points divisent le périmètre en deux parties égales, de sorte qu'on a, quant à la longueur, ligne $AEFB = AHGB$. Supposons que *A* et *B* aient cette propriété, alors la droite *AB* divise de même l'aire de la figure en deux

parties égales, car si l'une d'elles, par exemple *AHGBA*, était plus grande que l'autre *AEFBA*, on pourrait transformer la seconde en la rendant égale à la première, puisqu'elles sont isopérimètres et qu'elles ont la base *AB* en commun; l'aire de la figure entière se serait ainsi accrue sans changer de périmètre, ce qui serait contraire à l'hypothèse; donc les deux parties doivent être équivalentes. Si elles étaient de différentes formes, on pourrait changer l'une d'elles, par exemple *AEFBA*, de manière qu'elle devienne symétriquement égale à l'autre *AGHBA*, la ligne *AB* étant l'axe de symétrie; et la figure nouvelle, composée de ces deux parties, serait équivalente de périmètre et d'aire à la figure primitive; elle serait donc aussi une des figures maxima. Admettons donc que *AEFBA* soit la partie transformée devenue symétrique à *AGHBA;* il s'ensuit que le prolongement de la perpendiculaire *DI*, abaissée d'un point quelconque *D* du demi-périmètre *AHGB* sur l'axe *AB*, rencontre l'autre moitié *AEFB* en un point *C* équidistant de l'axe, de manière qu'on a $DI = CI$, et que les triangles *ADB* et *ACB* sont égaux ou symétriques. Si les angles homologues *D* et *C* dans ces deux triangles n'étaient pas droits, on pourrait agrandir simultanément l'aire de ces triangles sans rien changer à la longueur de leurs côtés *AD* et *BD*, *AC* et *BC* (6), ni à la grandeur des segments de la figure, *AHD, DGB, BFC, CEA;* la base commune *AB* changerait seule; mais par-là l'aire de la figure entière deviendrait plus grande (puisque le quadrilatère *ADBC* en fait partie), sans que le périmètre changeât de grandeur, ce qui est contraire à l'hypothèse; donc les angles *D* et *C* sont des angles droits. Et comme en laissant les points *A* et *B* fixes, *D* peut représenter un point quelconque du demi-périmètre *AHGB*, il s'ensuit que la figure en question est un cercle. Il est vrai que la moitié *AHGB* de ce cercle appartient seule à la figure primitive, et que l'autre moitié *AEFBA* de celle-ci pouvait être de forme différente; mais puisque, comme nous venons de le démontrer, la moitié non changée de la figure est toujours un demi-cercle (*AHGBA*), puisqu'en outre on peut choisir arbitrairement et les points de division *A* et *B*, et la moitié qui doit rester invariable, la figure entière ne peut être qu'un cercle. Il n'y a donc pas *plusieurs* figures de différentes formes ayant la propriété d'unir la plus grande aire possible à un périmètre donné; il n'y en a qu'une *seule*, le cercle.

Remarques. I. Le théorème réciproque se déduit indirectement de celui-ci. Il en est de même pour la plupart des théorèmes réciproques

dont nous aurons à nous occuper dans la suite; c'est pourquoi leurs démonstrations seront toujours sous-entendues.

II. Rappelons encore ici, en ce qui concerne les figures sphériques, que toutes les fois que l'on aura recours à un théoreme, fondamental ou autre, concernant les figures planes, pour en déduire une démonstration, on devra avoir égard en même temps au théorème analogue sur les figures sphériques. Ayant, par exemple, démontré ci-dessus que dans les triangles *ADB* et *ACB* les angles *D* et *C* sont droits, on en conclura pour les figures sphériques, que chacun de ces angles est égal à la somme des angles à la base (14).

18. Le théorème que nous venons de démontrer (17) mérite en effet le nom de théorème *principal*, car il contient, il résume pour ainsi dire les principes les plus essentiels à la solution de la plupart des questions concernant les maxima et les minima d'aire, de périmètre, etc., dans les figures planes et sphériques. Les solutions qu'on en tire pour ces questions sont même aussi naturelles, aussi simples et aussi immédiates que possible, car elles dérivent graduellement du théorème principal, dont elles font pour ainsi dire partie, ou plutôt elles se présentent comme des théorèmes sur les différentes parties de la figure qui en est l'objet. De même que le cercle a la double propriété d'avoir entre toutes les figures isopérimètres ou équivalentes respectivement la plus grande aire ou le plus petit périmètre, de même ses différentes parties sont douées de propriétés semblables, desquelles ces théorèmes découlent. Ainsi ces théorèmes sont liés avec le théorème principal, de telle manière qu'ils en dérivent comme des corollaires, ou du moins que leurs démonstrations en résultent pour la plupart immédiatement. Et pourtant quelques-uns d'entre eux offriraient de grandes difficultés si l'on essayait de les démontrer isolément et indépendamment du théorème principal; c'est là, je crois la raison pour laquelle ils n'ont encore été énoncés ni démontrés par personne, que je sache.

Il serait utile d'adopter des dénominations fixes pour les différentes parties dans lesquelles le cercle lui-même et l'espace qui l'environne peuvent être divises au moyen de cordes, de sécantes et de tangentes, et de poser certains lemmes préliminaires; cela nous aiderait à énoncer les théorèmes suivants avec plus de facilité, et à les manier avec plus de sûreté. Mais comme la discussion complète de ces matières nous mènerait trop loin, nous n'en présenterons ici qu'une légère esquisse.

On a donné les noms de segment et de secteur à certaines parties de l'aire du cercle; il faudrait de même consacrer des dénominations spéciales aux parties qui sont limitées:

a) par plusieurs cordes et les arcs intermédiaires;

b) par plusieurs angles circonscrits et les arcs intermédiaires;

c) par des cordes et des angles circonscrits et les arc intermédiaires, etc.

J'ai choisi respectivement les expressions suivantes:

a. *partie de cercle entre* n *cordes;*

b. *partie de cercle entre* m *angles circonscrits;*

c. *partie de cercle entre* n *cordes et* m *angles circonscrits, etc.*

Il resterait encore à rechercher sous quelles conditions chacune de ces parties de cercle sera déterminée, ou bien, si l'on suppose certains élements donnés, quelles seront les limites entre lesquelles les autres éléments seront renfermées, etc. On peut suivre dans ces recherches une marche toute géométrique, en faisant varier le cercle ou ses éléments d'une manière continue; on parviendra ainsi à se convaincre par l'intuition immédiate de l'existence de certaines relations, et de propriétés qui sont contenues dans les théorèmes auxiliaires dont nous venons de parler. Nous les pourrons donc supposer connus dans la suite, comme on le fait habituellement pour quelques-uns d'entre eux; par exemple, on suppose qu'il y a toujours un cercle auquel un polygone de côtés donnés peut être inscrit.

Pour faire mieux comprendre ce que nous venons de dire, nous allons traiter de la manière indiquée la partie de cercle la plus simple, le segment.

1°. L'aire du cercle est divisée en deux segments $a\alpha$ et $a\beta$ (*fig.* 7) par une corde quelconque a; le plus petit de ces segments peut être nommé segment à *angle aigu,* et l'autre segment à *angle obtus,* lesquelles dénominations sont empruntées aux angles que la corde forme avec l'arc. *Segment rectangulaire* est donc synonyme de *demicercle.*

2°. La corde a et le cercle K étant donnés, les aires et les arcs (α, β) des segments restent constants, pendant que la corde change arbitrairement de position.

3°. La corde a étant seule donnée, lorsque le cercle grandit ou diminue, l'arc le plus grand β varie dans le même sens, tandis que le petit arc α varie en sens contraire, et les aires des segments augmentent et diminuent comme les arcs correspondants. L'accroissement et la diminution du grand arc β surpassent la diminution et l'accroissement du petit arc α;

la même relation existe entre les segments correspondants. — Le cercle obtient son minimum lorsque son diamètre devient égal à a; alors on a $\alpha = \beta$ et $a\alpha = a\beta$: quand au contraire le cercle devient infiniment grand, l'arc α atteint sa limite, la corde a; de même le segment $a\alpha$ atteint sa limite, zéro, tandis que β et $a\beta$ deviennent infiniment grands. Donc, pendant que le cercle obtient toutes les valeurs possibles, les arcs α et β parcourent ensemble toutes les valeurs entre a et ∞, et les aires des segments $a\alpha$ et $a\beta$ prennent toutes les grandeurs entre 0 et ∞.

On remarque encore:

4°. Qu'étant donnée deux des quatre quantités suivantes: 1) le cercle K, 2) la corde a, 3) l'arc α ou β, 4) l'aire du segment $a\alpha$ ou $a\beta$, les deux autres sont absolument déterminées, sauf les cas où l'arc et l'aire seraient donnés, car alors deux segments seraient possibles en général, savoir, le segment à angle aigu et celui à angle obtus, comme on verra dans la suite (33). On suppose toutefois, que les quantités données ne s'excluent pas mutuellement, en ayant égard aux limites indiquées ci-dessus (3°).

Conséquences du théorème principal.

19. *Si le périmètre d'une figure se compose d'une droite de longueur arbitraire* G *et d'une ligne* L *de forme arbitraire, et si en même temps la longueur de la ligne* L *ou l'airé de la figure est donnée, celle-ci est un maximum, ou la ligne* L *est un minimum, quand cette figure est un demi-cercle.*

Démonstration. Toute figure comprise dans ce théorème peut être considérée comme la moitié d'une figure symétrique, dont la droite G est l'axe de symétrie, et dont le périmètre, égal à $2L$, est donné. Mais l'aire de la moitié est nécessairement un maximum dès que la figure entière en est un. Donc notre théorème est une conséquence du théorème du n° 17*).

Il s'ensuit en particulier: *qu'entre tous les segments de cercle à arcs*

*) On pourrait démontrer séparément ce théorème, et en déduire inversement le théorème principal; la démonstration sera même très courte, si l'on renonce en partie à la rigueur et à la généralité que nous avons tâché de maintenir. On n'a qu'à supposer qu'une figure maximum existe; dès lors il ne sera pas difficile de démontrer qu'elle ne peut être que le demi-cercle, parce qu'on pourra faire grandir chaque autre figure, telle que $AEFBA$ (fig. 6) (dans laquelle AB représente la droite G qui est à volonté, et $AEFB$ représente la ligne donnée L), toutes les fois que l'angle ACB ne sera pas droit pour chacun des points C de la ligne $AEFB$.

égaux ou à aires égales, c'est le demi-cercle qui a l'aire la plus grande ou l'arc le plus petit.

20. *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé d'une droite donnée* a *et d'une ligne prise à volonté* L, *le segment de cercle a la plus grande aire pour des longueurs égales de la ligne* L, *et la plus petite ligne* L *quand les aires sont égales.*

Démonstration. Supposons la ligne L de forme quelconque, et qu'elle compose avec la droite a le périmètre de la figure aL, on peut toujours construire sur a un segment de cercle dont l'arc α soit égal à L (18), α et L étant situés du même côté de a. Complétons le cercle, et désignons l'autre arc par β: alors le cercle de périmètre $\alpha+\beta$ est plus grand que la figure limitée par $L+\beta$ (17); ainsi $a\alpha+a\beta > aL+a\beta$: donc $a\alpha+aL$.

Remarque. On déduira de ce théorème une règle générale, qui nous sera bien utile dans la suite. La voici:

Dans toute figure dont l'aire doit être un maximum sous des conditions quelconques, chaque partie du périmètre qui est libre d'avoir une forme quelconque entre deux points donnés, doit être un arc de cercle.

21. *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé de deux droites données* a, b *et d'une ou de deux lignes à volonté* l *et* l_1, *c'est la partie de cercle comprise entre les droites* a *et* b, *prises comme cordes* (18), *qui a l'aire maxima quand la somme des lignes* $l+l_1 = L$ *est donnée, et la somme minima* L *ou* $l+l_1$, *quand l'aire est donnée.*

Démonstration. Soit K le segment de cercle, et F une quelconque des autres figures dont nous venons de parler. Ajoutons à K les deux segments de cercle $a\alpha$ et $b\beta$, de manière à compléter le cercle K_1; ajoutons les mêmes segments à la figure F, de manière à obtenir une figure F_1: alors K_1 et F_1 seront de même périmètre, $L+\alpha+\beta$: mais l'aire de K_1 est plus grande que celle de F_1, donc aussi $K > F$.

Remarque. On voit qu'il est indifférent que les droites a et b se succèdent immédiatement dans le périmètre, qu'elles aient ou qu'elles n'aient pas d'extrémité commune, qu'il y ait une seule ligne L ou deux lignes l et l_1.

22. *Si au lieu des droites* a *et* b, *leur somme* $s = a+b$ *est donnée, les autres conditions restant les mêmes, l'aire de la partie de cercle est un maximum maximorum, et la somme* $L = l+l_1$ *est un minimum minimorum, lorsque les deux droites sont égales, c'est-à-dire lorsqu'on a* $a = b = \frac{1}{2}s$.

Démonstration. Prenons a et b de longueurs différentes, et construisons la partie de cercle renfermée par elles de manière qu'elles aient un point C commun (on aura alors $l_1 = 0$ et $l = L$); joignons les autres extrémités A et B par la droite AB, la figure en question sera composée du triangle ACB et du segment ALB; mais ce triangle s'accroîtra quand les côtés a et b deviennent égaux; la figure entière croît par là, et plus encore quand elle se convertit en une partie de cercle entre les côtés égaux, pris comme cordes, C. Q. F. D.

23. *La partie de cercle entre* n *cordes* a, b, c, ... *est un maximum entre toutes les figures dont le périmètre est composé de ces mêmes côtés droits et d'autres lignes à volonté* $l, l_1, l_2, \ldots$ *dont le nombre est arbitraire depuis* 1 *jusqu'à* n *et dont la somme* $= L$; *et les aires de toutes ces figures étant égales, son périmètre est un minimum.*

Ce théorème se démontre comme celui du n° **21**.

24. *Si dans le théorème précédent les cordes* a, b, c, ... *ne sont pas donnés isolément, mais si leur somme* s *est donnee, l'aire de la partie de cercle est un maximum entre les maxima, et la somme* L *des autres parties du périmètre* $l, l_1, l_2, \ldots$, *est un minimum entre les minima, lorsque ces droites sont égales entre elles.* — Ce théorème est encore applicable au cas où l'on se donnerait quelques-unes des droites et seulement la somme des autres, et au cas où les sommes de différents groupes de droites seraient données; ce seraient alors les droites appartenant au même groupe qui devraient être égales entre elles.

Ce théorème se démontre de la même manière que le théorème du n° **22**.

25. Pour le cas spécial où la somme $L = l + l_1 + \ldots$ est égale à zéro, on a les théorèmes suivants qui sont connus:

I. *Un polygone de côtés* a, b, c, ..., *donnés, est un maximum lorsqu'il est une partie de cercle entre les cordes* a, b, c, ..., *c'est-à-dire lorsqu'il est inscriptible dans un cercle.*

II. *Un polygone de* n *côtés et de périmètre donné est un maximum, lorsqu'il a les côtés égaux et qu'il est inscriptible à un cercle, c'est-à-dire lorsqu'il est régulier;* et réciproquement *entre les périmètres de tous les polygones équivalents de* n *côtés, celui du polygone régulier est un minimum.*

26. Quand on cherchera donc quel polygone a l'aire maxima pour un périmètre constant, ou le périmètre minimum pour une aire constante, le nombre de côtés étant variable, on n'aura qu'à s'occuper des polygones réguliers, et l'on trouvera la loi suivante:

Les aires des polygones réguliers isopérimètres forment une série croissante, qui commence par le triangle et se termine par le cercle; et les périmètres des polygones équivalents forment une série décroissante, à partir du triangle jusqu'au cercle.

Démonstration. Deux polygones réguliers isopérimètres d'un nombre de côtés différents étant donnés, par exemple un pentagone *ABCDE* et un quadrilatère *abcd*, on peut considérer ce dernier comme un pentagone dont l'un des côtés serait nul, ou bien, en prenant arbitrairement un point *e* sur un des côtés de ce quadrilatère, par exemple, sur *ad*, le considérer comme un pentagone *abcde*, dont l'un des angles *e* serait égal à deux angles droits; le quadrilatère régulier peut donc être regardé comme un pentagone irrégulier: donc son aire est plus petite que celle du pentagone régulier *ABCDE*.

Remarque I. On trouverait des lois semblables et pour le théorème du n° 24 et pour un grand nombre des théorèmes suivants, en supposant toujours la somme des côtés rectilignes *a*, *b*, *c*, ..., donnée, et en variant leur nombre; mais il suffit d'avoir appelé sur ce point l'attention du lecteur.

II. La démonstration qu'on vient de lire est remarquable par sa simplicité, et il est bien étonnant qu'on ne l'ait pas encore donnée. Toutes les démonstrations que je connais de ce théorème pour les figures planes sont plus ou moins prolixes et embarrassées; la plus élégante de toutes est celle qu'en donne *Lhuilier;* mais il paraît qu'il n'en existe encore aucune pour les figures sphériques. Aussi ne suis-je parvenu à trouver la démonstration donnée ci-dessus, qui s'applique également aux deux espèces de figures, qu'après en avoir fait plusieurs pour les figures planes, et tenté inutilement de les appliquer d'une manière analogue aux figures sphériques.

27. I. *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé d'un nombre* n *de côtés rectilignes* a, b, c, ..., *donnés, d'une droite* G *de longueur arbitraire, et d'un nombre (qui peut varier depuis* 1 *jusqu'à* n *inclusivement) de lignes,* l, l_1, l_2, ..., *de forme quelconque, la partie de cercle entre* G *pris pour diamètre et les cordes* a, b, c, ..., *est un maximum tant que la somme* $\mathrm{L} = \mathrm{l} + \mathrm{l}_1 + \ldots$ *reste la même, et son péri-*

mètre est un minimum entre ceux de toutes les figures qui lui sont équivalentes.

II. *Un théorème analogue s'applique au cas où la somme des* n *droites* a, b, c, ..., *serait donnée; il faut alors qu'elles soient égales entre elles.*

III. *Si dans les deux cas* (I *et* II) *les lignes* l, l_1, ..., *sont toutes nulles, la figure se change en un polygone de* n + 1 *côtés, inscrit à un cercle qui aura le côté arbitraire* G *pour diamètre.*

La démonstration est fondée sur les théorèmes précédents et ressemble à celle du théorème (19).

28. Entre toutes les figures dont le périmètre est composé des deux côtés *AB, AC* d'un angle droit *A,* et d'une ligne arbitraire *L,* le quadrant de cercle a la double propriété d'avoir une aire maxima pour la même longueur de la ligne *L,* et la ligne *L* minima pour *l* une même aire donnée. — Ce théorème a pareillement lieu quand la ligne *L* est composée de droites données *a, b, c,* ...., et de lignes arbitraires l, l_1, l_2, ...; c'est alors la partie de cercle entre les cordes *a, b,* ...., et les rayons *AB, AC* qui est un maximum; de même quand la somme et le nombre des droites *a, b, c,* ...., sont donnés.

Dans tous ces cas on peut considérer la figure en question comme moitié d'une autre figure, qui aurait la droite *AB* ou *AC* pour axe de symétrie; ces théorèmes découlent alors immédiatement des théorèmes précédents (19 et 27).

29. I. Si la ligne *L* doit partir d'un certain point *B* du côté donné *AB,* le maximum ou le minimum (28) a lieu lorsque la figure est la moitié d'une partie de cercle dont l'autre côté *AC* est l'axe de symétrie, de manière que le centre du cercle est sur ce côté auquel par suite *L* est perpendiculaire.

II. Le point *B* étant donné sur le côté *BD,* si l'angle *BDC,* au lieu d'être droit, est aigu, les théorèmes restent les mêmes, car la figure s'est seulement accrue d'un triangle constant *BAD,* que l'on obtient en abaissant du point *B* une perpendiculaire *BA* au côté *CD;* le centre du cercle se trouve encore sur le côté *CD.*

30. *Entre toutes les figures limitées par les côtés* AB *et* AC *d'un angle donné* BAC, *qui peuvent être de longueur quelconque, et par une*

ligne L *de longueur donnée mais de forme arbitraire, le secteur de cercle est un maximum.*

Démonstration. Qu'on construise la même figure symétriquement sur un des côtés, par exemple sur AC, de manière que la figure $ABLC$ soit d'un côté et que la figure AB_1L_1C soit de l'autre côté de AC; alors il faut, pour que l'aire soit la plus grande possible, que la ligne $BLCL_1B_1$, de même que sa moitié L, soient des arcs d'un cercle dont le centre se trouve sur le côté AC; mais par les mêmes raisons ce même centre de L doit être sur le côté AB; il est donc au point d'intersection A des côtés AB, AC.

Une autre démonstration découle de (29, I).

31. I. *Ce théorème* (30) *a pareillement lieu pour le cas où la ligne* L *est composée de droites données* a, b, c, ..., *et de lignes arbitraires* l, l_1, l_2, ...; *la partie du secteur de cercle entre les rayons* AB, AC *et les cordes* a, b, c, ..., *est alors un maximum.*

II. *Faisant décroître les lignes* l, l_1, l_2, ... *jusqu'à ce qu'elles deviennent nulles, on obtient un théorème concernant le polygone dont un angle* BAC *est donné avec tous les côtés* A, B, C, ..., *non adjacents à cet angle* *).

Ces théorèmes et le théorème (30), se transforment en plusieurs autres, donnés ci-dessus, quand on fait successivement l'angle $A = \frac{1}{2}\pi$, $= \pi$, $= 2\pi$.

32. *Entre tous les secteurs de cercle isopérimètres, celui dont l'arc est égal au diamètre est un maximum.*

Démonstration. Toute aire de secteur est égale à la moitié d'un triangle rectangle, dont les côtés qui comprennent l'angle droit sont respectivement égaux à l'arc et au diamètre; mais ce triangle est un maximum quand il est isoscèle (7): donc, etc.

Remarque. Ce théorème ne s'applique pas complétement aux secteurs de cercle sphériques, car ce n'est pas au diamètre sphérique mais au diamètre rectiligne véritable que l'arc doit alors être égal. Aussi devient-il

---

*) Il s'ensuit en particulier: *qu'entre tous les triangles dont l'angle au sommet* A *et la base* a *sont donnés, c'est le triangle isoscèle qui est un maximum; et qu'entre tous les triangles équivalents, qui ont le même angle* A *au sommet, c'est le triangle isoscèle qui a la plus petite base* a.

difficile de le démontrer géométriquement, tandis qu'on y parvient sans peine au moyen du calcul.

Les deux théorèmes se correspondent du reste de la manière suivante:

I. L'angle au centre appartenant au secteur maximum reste le même tant sur la sphère que dans le plan, quelle que soit du reste la longueur du périmètre; il est toujours égal à $\frac{4}{\pi}$ 90°.

II. L'aire du secteur plan est égale au carré du rayon, l'aire du secteur sphérique est égale au carré de la corde rectiligne qui correspond à son rayon sphérique.

Pour le cas spécial où le périmètre du secteur sphérique est égal au périmètre d'une moitié de grand cercle, ce secteur correspond à un grand cercle, et son aire est égale à $2r^2$, ou à $\frac{1^{\text{ième}}}{2\pi}$ de la surface de la sphère dont r est le rayon.

33. *De deux segments de cercle à angles aigus et à arcs de même longueur, celui auquel appartient l'angle le plus grand ou la plus petite corde, est le plus grand; et de deux segments à angles obtus et à arcs de même longueur, le plus grand est celui dont l'angle est plus petit ou dont la corde est plus grande.*

Démonstration. Soient ALB et $A_1L_1B_1$ deux segments à angles aigus; soit en outre arc L = arc L_1 et corde $AB <$ corde A_1B_1; de C, centre de L, menons les rayons CA et CB, et prenons sur leurs prolongements deux points de manière que la droite qui les unit soit parallèle à AB et égale à A_1B_1 (*fig.* 8); construisons enfin le segment $A_1L_1B_1$ sur cette corde qui sera située au-delà de AB; on sait (30) que le secteur $CALBC$ est plus grand que $CA_1L_1B_1C$; donc, en retranchant de part et d'autre le triangle ACB, on a $ALB > AA_1L_1B_1BA$; donc, *à fortiori*, segment ALB $>$ segment $A_1L_1B_1$.

La seconde partie du théorème se démontre d'une manière analogue.

Remarques. I. Entre les segments à angles aigus et ceux à angles obtus se trouve placé le segment rectangulaire ou le demi-cercle qui est le maximum des segments à arcs égaux (19); les segments des deux genres diminuent à mesure qu'ils s'en éloignent, et puisqu'ils décroissent d'une manière continue, il faut que pour chaque segment d'une espèce il y en ait un de l'autre espèce qui lui soit équivalent; il y a donc toujours deux et

seulement deux différents segments d'arc et d'aire donnés; il faut toutefois pour cela que l'aire donnée soit plus petite que celle du demi-cercle dont l'arc a la longueur donnée. Cela confirme encore ce que nous avons avancé ci-dessus (18, 4).

II. Il y a des théorèmes analogues concernant d'autres figures construites sur deux bases inégales AB et A_1B_1, et dont le reste du périmètre L et L_1 est composé de droites données $a, b, c, \ldots$ communes aux deux figures, et d'autres parties arbitraires $l, l_1, l_2, \ldots$, de même somme de part et d'autre, en sorte qu'on ait $L = L_1$; les démonstrations découlent du n° 31.

34. *Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés des côtés d'un angle* A *donné, dont l'un* AB *est déterminé, tandis que l'autre* AC *est arbitraire, et d'une ligne quelconque* L *menée de* B *au côté* AC, *mais ne le dépassant pas, la partie de cercle convexe qui est comprise entre la sécante* AB *et la tangente* AC *est un maximum tant que le perimètre ne varie pas, c'est-à-dire tant que la somme* L + AC *reste la même (et réciproquement).*

Démonstration. Soit BLC (*fig.* 9.) un arc de cercle qui touche AC au point C; soit en même temps $L + AC$ la longueur voulue; $ABLCA$ sera la partie de cercle en question. Nous avons donc à démontrer qu'il n'y a pas d'autre ligne L_1, menée du point B à un autre point E ou F du côté AC, sans dépasser ce côté, qui forme une figure de même périmètre et de même ou de plus grande aire.

Imaginons d'abord la ligne L_1 qui joint B et E; le segment BLC et la figure BL_1EC auront la même base BC et des périmètres égaux; on aura donc (20) $BLC > BL_1EC$, et par suite $ABLCA > ABL_1EA$.

Tirons la ligne L_1 de B en F; pour qu'elle renferme la plus grande aire possible, il faut qu'elle soit un arc de cercle (20, *remarque*) et qu'elle s'élève, du moins en partie, au-dessus de l'arc L; mais alors elle rencontre encore cet arc dans un point autre que B, et puisque, en outre, le prolongement de L, l'arc CD, la rencontre évidemment, on est conduit à deux cercles ayant trois points communs, ce qui est impossible. — Si cette manière de raisonner ne paraît pas absolument satisfaisante, on pourra recourir à la suivante, plus directe encore.

Quelle que soit la forme de la ligne L_1, tirée de B en F, il faut qu'elle rencontre l'arc CD, prolongement de L, dans un certain point G

Crelle, Journal d. Math. Bd. XXIV Heft 1.

Facsimile einer Handschrift von Laplace.

Soit E l'équation séculaire de la lune, au moment de l'eclipse; augmentez l'anomalie moyenne, de 43 E; ~~diminuez l'argument de l'évection de $\frac{1}{4}$ E~~ ~~et augmentez l'argument de la variation, de 2E, soit alors~~ L, la longitude de la lune. soit i le nombre des siecles écoulés depuis l'eclipse observée jusqu'en 1756. on determinera l'accroissement de la longitude de la lune, qui ~~[illegible]~~ a lieu, lorsque l'on diminue ~~augmente~~ l'anomalie moyenne, de i 200" et lorsque l'on augmente ~~diminue~~ de la meme quantité, l'argument de l'evection; soit h cet accroissement positif ou négatif ensorte que L ± h soit la nouvelle longitude de la lune. soit L' la longitude du soleil au moment de l'eclipse. on formera l'équation

$$hx = L' - L$$

on formera autant d'équations semblables, qu'il y a d'eclipses. ensuite, on disposera ces équations, de manière que tous leurs premiers membres soient positifs. on ajoutera ensemble toutes ces équations ainsi disposées. la somme de leurs seconds membres divisée par la somme des coefficiens de x sera la valeur de x qui resulte de l'ensemble des eclipses; et le mouvement séculaire de l'apogée, donné par la table, doit être diminué de cette valeur de x, multipliée par 200".

36. *Si, sous les conditions des deux derniers théorèmes* (34 *et* 35), *la ligne* L *doit être composée de droites données* a, b, c, ... *et de parties arbitraires* l, l_1, l_2, ..., *la figure sera un maximum ou un minimum, selon qu'elle sera une partie convexe ou concave de cercle, comprise entre la sécante* AB, *la tangente* AC *et les cordes* a, b, c, ...

La discussion des limites entre lesquelles ces deux théorèmes sont possibles, rentre dans les recherches mentionnées ci-dessus (18).

Nous ajouterons seulement que l'angle *A*, le côté *AB* et les droites *a, b, c,* .... étant donnés, il y aura en général deux valeurs déterminées du périmètre, pour lesquelles la partie de cercle en question se transforme en polygone, parce que alors les arcs *l*, l_1, ... deviennent nuls: dans l'intervalle compris entre ces deux polygones le théorème est impossible.

37. *Entre toutes les figures isopérimètres dont le périmètre est composé de deux côtés* AB *et* AC, *de longueur arbitraire, formant entre eux un angle donné* A, *et d'une ligne quelconque* L, *qui les joint, sans les dépasser, celle-là est un maximum, qui est une partie convexe de cercle* ABLCA (*fig.* 11), *entre l'angle circonscrit* A (*en sorte que* L *est alors un arc de cercle tangent aux côtés* AB *et* AC). *Et si, au lieu du périmètre, c'est la différence entre la ligne* L_1 (*au lieu de* L) *et la somme des côtés* AB *et* AC *qui est donné, la figure est un minimum, lorsqu'elle est une partie concave de cercle* ABL_1CA *entre l'angle circonscrit* A.

Démonstration. Si l'on joint un point quelconque *D* de la ligne *L* avec le point *A*, au moyen d'une droite *AD*, les parties *DB* et *DC* doivent être des arcs de cercle, tangents aux côtés *AB* et *AC*, pour que la figure soit un maximum (34); et comme le point *D* est absolument arbitraire, il faut que toute la ligne *L* soit un arc de cercle, qui est tangent en même temps aux deux côtés.

Remarques. I. Si l'angle *A* devient $=\pi$ ou $>\pi$, la partie de cercle convexe se transforme en un cercle entier, et le théorème perd alors tout caractère propre; la partie concave devient nulle sous la même condition.

II. Si les côtés de l'angle *A* sont limités au moyen d'une droite *EF* ou *GH*, qui est donnée avec ses angles adjacents *E*, *F* ou *G*, *H*, ces théorèmes s'appliquent également aux figures *EBLCF* et EBL_1CF, ou GBL_1CH et *GBLCH*, dont la première est un maximum quand le

périmètre est donné, tandis que la dernière est un minimum quand la différence $(EB + CF) - L_1$ ou $(BG + HC) - L$ est donnée. Ces théorèmes restent les mêmes, quand on a $A = 0$, et que par-là les côtés EG et FH sont parallèles.

38. *Quand la ligne* L *ou* L_1 (37) *doit être composée de droites données* a, b, c, ..., *et d'arcs arbitraires* l, l_1, ..., *la figure est pareillement un maximum ou un minimum, lorsqu'elle est une partie de cercle convexe ou concave entre les cordes* a, b, c, ... *et l'angle circonscrit* A.

Les limites sont données par le cas où les lignes l, l_1, l_2, ... deviennent nulles; alors la figure devient un polygone, dont les côtés AB et AC sont égaux.

39. I. *Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés des côtés* AB, AC *d'un angle donné* A, *arbitraires en longueur, plus d'une ligne* L *qui les joint sans les dépasser, et pour lesquelles la somme des lignes* L *et* AC *est donnée, la figure maxima est la partie de cercle convexe entre la tangente* AC *et la normale* AB *(qui passe par le centre).*

II. *Si la différence entre* L *et* AC *est donnée, la figure minima est une partie de cercle concave, entre la tangente* AC *et la normale* AB.

III. *Ces deux théorèmes ont également lieu quand la ligne* L *est composée de droites données* a, b, c, ... *et de lignes arbitraires* l, l_1, l_2, ...

Démonstration. On n'a qu'à répéter la même figure symétriquement au-delà de AB; ces théorèmes découlent alors immédiatement des précédents (37 et 38).

40. I. *Entre toutes les figures isopérimètres, dont les périmètres sont composés des côtés* AC *et* AF, BD *et* BE *de deux angles* A *et* B *donnés, lesquels côtés sont de longueur arbitraire, plus d'une ou de deux lignes à volonté* l *et* l_1, *qui joignent les extrémités de ces côtés, si l'on suppose que les figures ne sortent pas des deux espaces angulaires* A *et* B, *la partie de cercle convexe* ACIDBEl_1F (*fig.* 12, *a*) *entre les angles circonscrits* A *et* B *est un maximum. — Ou bien, si c'est la différence entre la somme des côtés du plus petit angle* A *et le reste du périmètre, c'est-à-dire si c'est la différence* $(AC + AF) - (BD + BE + l + l_1)$ *qui est donnée, la figure minima est la partie de cercle concave* ACIDBEl_1FA (*fig.* 12, *b*) *entre les angles circonscrits* A *et* B.

Démonstration. Complétons le cercle au moyen des arcs α et β; alors la partie convexe $ACtDBEl_1F = K$ (*fig.* 12, *a*) est composée du cercle $\alpha l \beta l_1 = K_1$ et des deux parties concaves $A\alpha$ et $B\beta$ entre les angles A et B. Imaginons une quelconque F des figures comprises dans le théorème, et retranchons-en les mêmes parties $A\alpha$ et $B\beta$ entre les angles A et B; il reste une figure F_1 dont le périmètre, comme il est facile de le voir, est *égal* au périmètre du cercle K_1 ou *plus petit*, de manière qu'on a toujours $K_1 > F_1$, et ensuite $K > F$.

Le raisonnement suivant peut également servir à cette démonstration. On montrera d'abord que le maximum ne peut pas être limité par les seuls côtés des angles A et B, qu'il ne peut donc pas être un quadrilatère, mais que les lignes l et l_1 sont nécessaires. On voit ensuite que ces lignes doivent être des arcs de cercle (20) tangents aux côtés (34 ou 37), et qu'ils appartiennent à un même cercle (38). Car si l'on joint deux points quelconques x et x_1 des arcs l et l_1 au moyen d'une droite $xx_1 = a$, celle-ci partage la figure en deux parties, dont chacune est un maximum, lorsqu'elle est une partie de cercle entre l'angle A ou B et la corde a (38).

II. La forme de la figure maxima n'est pas absolument déterminée, car les arcs l et l_1 peuvent changer de grandeur comme ils voudront, pourvu que leur somme reste constante et que le cercle ne varie pas. Si donc l'un des angles, par exemple A, reste fixe, l'autre B pourra tourner autour du cercle pour occuper toutes les positions depuis celle où son côté BE tombe sur le prolongement du côté AF jusqu'à celle où l'autre côté BD tombe sur le prolongement de AC. Une des positions intermédiaires est celle dans laquelle la droite AB, qui joint les sommets des deux angles, divise en deux parties égales et ces angles et la figure elle-même. Pour la limite donnée par la coïncidence de BE et du prolongement de AF (*fig.* 12, *c*), le théorème peut être énoncé de la manière suivante:

Entre les figures isopérimètres, dont le périmètre est composé de trois droites consécutives CA, AB, BD *de longueur arbitraire, formant entre elles deux angles donnés* A *et* B, *et d'une ligne arbitraire* L, *qui joint la première et la dernière des droites, sans les dépasser, la figure maxima est celle dans laquelle la ligne* L *est un arc du cercle, tangent aux trois droites.* — Il existe un théorème analogue pour la partie concave du cercle.

III. Ajoutons le corollaire suivant, qui concerne le cas dans lequel la diagonale AB passe par le centre du cercle, et partage la figure en deux moitiés symétriques.

Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés de trois droites consécutives CA, AB, BD, *formant entre elles les angles donnés* $\frac{1}{2}A$ *et* $\frac{1}{2}B$, *et d'une ligne arbitraire* l, *qui joint les côtés extérieurs* AC *et* BD *sans les dépasser, la somme des lignes* l, AC *et* BD *restant constante, la figure maxima est celle dans laquelle* l *est un arc de cercle qui a son centre sur le côté placé au milieu* AB *et qui est tangent aux côtés extérieurs* AC *et* BD.

41. *Si les conditions restent les mêmes que dans le théorème précédent* (40), *sauf qu'au lieu des angles* A *et* B, *c'est leur somme* S *qui est donnée, la figure est un maximum maximorum, lorsque ces angles sont égaux.*

Démonstration. Supposons les angles inégaux, soit $A > B$, et la partie de cercle, comme ci-dessus (40, II), de la forme (*fig.* 12, *c*); tirons la droite A_1B_1, de manière qu'on ait angle $CA_1B_1 = DB_1A_1$ et triangle AA_1B_1 équivalent à triangle ABB_1; alors la figure A_1CLDB_1 est équivalente à $ACLDB$. Si les triangles étaient isopérimètres, c'est-à-dire si l'on avait

$$AA_1 + A_1B_1 = AB + BB_1,$$

le triangle AA_1B_1 serait plus grand que le triangle ABB_1, parce que l'angle x est plus grand que y (3, II); mais les triangles sont supposés être équivalents: donc

$$AA_1 + A_1B_1 < AB + BB_1,$$

et par suite, périmètre $A_1CLDB_1 <$ périmètre $ACLDB$. Mais il est clair que la première figure étant équivalente à la seconde, quoique son périmètre soit plus petit, pourra avoir une aire plus grande que celle-ci à même périmètre, d'autant plus qu'elle aussi pourra être une partie de cercle.

C'est la facilité de son application aux figures sphériques qui nous a fait choisir cette démonstration; car il y en a de plus simples et de plus directes pour les figures planes seules. Par exemple, tirons la droite A_1B_1 de manière qu'on ait

$$\text{angle } A_1 = \text{angle } B_1 \quad \text{et} \quad AA_1 + A_1B_1 = AB + BB_1;$$

alors, puisque $x > y$, le triangle AA_1B_1 est plus grand que ABB_1 (3, II), et à périmètre égal la figure A_1CLDB_1 plus grande que $ACLDB$, etc. —

Enfin la figure dont nous nous occupions dans le n° 40, III, peut servir à une autre démonstration du même théorème.

42. I. *Entre toutes les figures isopérimètres dont les périmètres sont composés:*

1°. *Des côtés de longueur arbitraire de* m *angles donnés* A, B, C, ... *dont la somme est plus grande que* $(m-2)\pi$;

2°. *Des lignes quelconques,* $l, l_1, l_2, \ldots,$ *dont le nombre est arbitraire depuis* 1 *jusqu'à* m *et qui joignent des côtés de différents angles;*

Si l'on exige en outre qu'aucune de ces figures ne sorte des espaces angulaires, la figure maxima est une partie de cercle convexe entre les angles circonscrits A, B, C, ...

Si A, *le plus petit des angles donnés, est assez petit pour que son angle supplémentaire soit plus grand que la somme des angles supplémentaires de tous les autres angles donnés, et si l'on connaît en même temps la différence entre la somme des côtés de l'angle* A *et le reste du périmètre, la figure est un minimum, lorsqu'elle est une partie de cercle concave entre les angles circonscrits* A, B, C, ...

Cette partie de cercle concave est de même forme que celle que nous avons considérée dans le n° 40. Dans la suite, la seconde partie sera toujours sous-entendue.

II. *Si l'on donne seulement la somme des angles et non chaque angle à part, la figure est un maximum maximorum, lorsque ces angles sont égaux entre eux, et que la figure est également une partie de cercle.*

La démonstration des ces théorèmes est analogue à celle du n° 40.

43. I. *L'aire d'un polygone de* m *côtés, dont les angles et le périmètre sont donnés* *), *est un maximum lorsque ce polygone est circonscriptible à un cercle* **).

---

*) Il suffit pour le polygone plan de *m* côtés, que *m*—1 angles soient donnés, car le dernier angle est alors déterminé. Quant au polygone sphérique de *m* côtés, il faut remarquer que son aire serait fixée dès que ses *m* angles seraient donnés: il faut donc énoncer ainsi le théorème en ce qui le concerne: *Si les angles d'un polygone sphérique de* m *côtés sont donnés, son périmètre est un minimum lorsqu'il est circonscriptible à un cercle;* le théorème sur les figures planes devient plus analogue à celui-ci, quand on suppose donnés les angles et l'aire.

**) Je crois que c'est *Lhuilier* qui, dans son ouvrage mentionné ci-dessus, a été le premier à énoncer ce théorème pour les figures planes. Il le démontre au moyen du calcul, d'une manière très ingénieuse, mais assez compliquée. On ne le retrouve plus dans les auteurs qui lui sont postérieurs; ils paraissent avoir reculé devant la démonstration.

II. *Si le périmètre seul est donné, le polygone de* m *côtés est un maximum, quand il est équiangle et circonscriptible à un cercle, c'est-à-dire quand il est régulier.*

Ces théorèmes découlent comme limites des précédents (42) quand on y fait diminuer la somme des angles donnés jusqu'à ce qu'elle devienne égale à $(m-2)\pi$; les arcs l, l_1, ..., deviennent alors nuls, et la figure se change en un polygone de m côtés.

On peut aussi démontrer directement ces théorèmes, conformément au n° 40.

44. I. *Si le périmètre d'une figure doit être composé:*

1°. *Des côtés de longueur arbitraire, de* m *angles donnés* A, B, C, ... *dont la somme est plus grande que* $(m-1)\pi$;

2°. *D'une droite* g *de longueur arbitraire;*

3°. *De lignes quelconques* l, l_1, l_2, ...;

Si en outre la figure doit être renfermée dans les espaces angulaires donnés, et si, à l'exception de la droite g, *la longueur de tout le reste du périmètre est donnée, l'aire comprise est un maximum, quand la figure est une partie de cercle entre les angles circonscrits* A, B, C, ..., *et le diamètre* g.

Si donc la base g aboutit par son extrémité à un des côtés des angles, il faut qu'elle soit perpendiculaire sur lui.

On obtient le corollaire suivant, en faisant diminuer les angles jusqu'à ce que leur somme soit égale à $(m-1)\pi$.

II. *Entre tous les polygones que l'on peut construire sur une base arbitraire* g, *la somme* s *des deux angles adjacents à cette base étant supposée égale à* π *ou* 180°, *et les autres angles étant donnés ainsi que la somme des côtés (la base* g *non comprise), le polygone maximum est celui qui est composé de côtés tous tangents au cercle dont la base* g *est le diamètre. Les angles à la base sont donc droits.*

Si, au lieu des angles A, B, C, ..., la somme de deux, de trois, etc., d'entre eux est donnée, qu'ils se suivent ou non dans le périmètre, l'aire est la plus grande possible quand ils sont égaux.

Ces théorèmes découlent du précédent (42), quand on répète la figure symétriquement de l'autre côté de la base g.

45. I. *Si l'on supprime la droite* g, *et si l'on suppose que la somme des* m *angles soit plus grande que* $(m-\frac{3}{2})\pi$, *que l'angle* A *soit plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *et que de ses côtés* AA_1, AA_2, *l'un* AA_1 *soit arbitraire, tandis que le reste du périmètre est donné; la figure est un maximum, lorsqu'elle est une partie de cercle entre les angles circonscrits* B, C, ... *la tangente* AA_2 *et la normale* AA_1.

Quand la somme des angles devient $=(m-\frac{3}{2})\pi$, le théorème s'énonce ainsi:

II. *Si les angles d'un polygone sont donnés, si l'un des angles* A_1 *adjacents à sa base* AA_1 *est égal à* $\frac{1}{2}\pi$; *et l'autre* A *plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$; *si en outre la somme de tous les côtés, moins la base, est donnée; ce polygone est un maximum, lorsque ces côtés sont tangents à un cercle dont le centre est sur la base* AA_1.

III. *Si, au lieu des angles* A, B, C, ..., *leur somme est donnée, la figure devient, dans les deux cas précédents* (I et II), *un maximum maximorum, l'orsqu'on a*

$$B = C = D = \ldots = 2A,$$

les conditions indiquées plus haut étant d'ailleurs remplies; en outre, les côtés compris entre les angles B, C, D, ..., *seront égaux, et chacun d'eux sera double du côté perpendiculaire sur la base en* A_1.

Ces théorèmes découlent du n° 42, tout-à-fait comme ceux du n° 44.

46. I. *Le périmètre d'une figure étant composé:*

1°. *Des côtés de* m *angles donnés* A, B, C, D, ..., *dont la somme est plus petite que* $(m-2)\pi$;

2°. *De lignes arbitraires* l, l_1, l_2, ...;

Si les angles A *et* B *sont aigus tous les deux, et si de leurs côtés* AA_1, AA_2 *et* BB_1, BB_2, *deux, par exemple* AA_1 *et* BB_1, *ne forment qu'une même droite* AB, *si, en outre, tout le périmètre, à l'exception de la base* AB, *est donné, l'aire de la figure est un maximum lorsqu'elle est une partie de cercle entre les angles circonscrits* C, D, ..., *les tangentes* AA_2, BB_2, *et la normale* AB.

II. *Etant donnés les angles d'un polygone, avec cette condition que les angles* A *et* B, *adjacents à la base* AB, *soient aigus, ou tout au plus droits; si en outre la somme de tous les côtés, excepté la base, est donnée, le polygone est un maximum, lorsque tous ces côtés sont tangents à un cercle dont le centre est sur la base* AB. *De plus:*

III. *Les angles étant arbitraires, le polygone est un maximum, lorsque* $C = D = \ldots = 2A = 2B$; *alors tous les côtés, à l'exception de la base, sont égaux, ou*

IV. *Si l'angle* A, *qui n'est pas plus grand que* $\frac{1}{2}\pi$, *est seul donné de grandeur, le polygone est un maximum lorsque* $2B = C = D = \ldots$ *En même temps tous les côtés sont égaux, à l'exception de ceux qui forment l'angle* A.

Il ne sera pas inutile d'énoncer séparément l'application de ce théorème (IV) au quadrilatère et au triangle:

1°. Entre tous les quadrilatères que l'on peut construire avec un angle donné $A < \frac{1}{2}\pi$ et avec trois côtés BC, CD, DA, dont la somme est donnée, le plus grand est celui dans lequel l'angle $C = D = 2B$, et le côté $BC = CD$; — et si $A = \frac{1}{2}\pi$, il faut en outre qu'on ait $2AD = BC = CD$.

2°. Entre tous les triangles ABC qui ont le même angle donné $A < \frac{1}{2}\pi$ adjacent à la base AB, et dont la somme des côtés $AC + BC$ est la même, celui-là est un maximum dans lequel l'angle au sommet C est le double de l'autre angle à la base B *); — et si $A = \frac{1}{2}\pi$, on a $C = 2B = \frac{1}{3}\pi$, et en outre $BC = 2CA$, ce qui est une propriété connue.

47. I. *Si le périmètre d'une figure est composé:*

1°. *Des côtés de* m *angles donnés* A, B, C, ..., *dont la somme est plus grande que* $(m-1)\pi$;

2°. *Des lignes arbitraires* l, l_1, l_2, ...;

Si la longueur des côtés AA_1 *et* AA_2 *qui forment l'angle* A *est arbitraire, tandis que la longueur du reste du périmètre est donnée, la figure maxima est la partie de cercle entre les angles circonscrits* B, C, ... *et l'angle au centre* A. — Les côtés AA_1 et AA_2 sont donc des rayons du cercle; si l'un d'eux aboutit par son extrémité, non à un arc (l), mais à un côté d'un angle, il est perpendiculaire sur lui.

II. *Si la somme de deux angles quelconques* A_1 *et* A_2 *d'un polygone, entre lesquels un seul angle* A *est compris, est égale à* π, *et si en même temps, et les autres angles* A, B, C, ..., *et la somme de tous*

*) Même dans ce cas, le plus simple de tous, il est impossible de construire géométriquement la figure maxima, car elle suppose l'exécution de la trisection de l'angle supplémentaire de A, qui est égal à $3B$.

les côtés non-adjacents à l'angle A *sont donnés, ce polygone est un maximum lorsque les côtés arbitraires* AA_1 *et* AA_2 *sont des rayons d'un cercle auquel tous les autres côtés sont tangents; de manière que les angles* A_1, A_2 *sont égaux et droits.*

III. *Si l'angle* A *seul est donné, les autres conditions restant les mêmes, le polygone est un maximum lorsque les autres angles* B, C, ..., X *sont égaux; en même temps les côtés compris entre ces angles deviennent égaux, de même que ceux qui sont adjacents au premier et au dernier angle* BA_1 *et* XA_2, *qui sont de longueur moitié des autres.* — Dans ce cas la figure s'approche d'un secteur de polygone régulier, ce qu'elle devient en effet quand l'angle *A* est commensurable à π.

Ces théorèmes sont indépendants de la grandeur de l'angle *A;* s'il devient successivement $=\pi$, 2π, les théorèmes se changent en ceux des n° 44 et 42.

48. I. *Si, toutes choses restant les mêmes, l'un des côtés de l'angle* A, *par exemple* AA_2, *est donné, de manière que l'autre* AA_1 *seulement demeure arbitraire, la figure est un maximum lorsqu'elle est une partie de cercle convexe entre les angles circonscrits* B, C, ..., *la sécante* AA_2 *et la normale* AA_1.

Pour une certaine longueur de la partie donnée du périmètre, la figure se change en un polygone, limite des figures du théorème.

II. *Si l'angle* A *est plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *et si, comme dans le cas précédent,* AA_2 *est donné de même que la longueur du reste du périmètre, y compris le côté* AA_1, *la partie de cercle entre les angles circonscrits* B, C, ..., *la tangente* AA_1 *et la sécante* AA_2, *est un maximum.*

La limite est encore donnée par un polygone.

49. I. *Entre toutes les figures de périmètre donné et composé:*

1°. *De* n *droites données,* a, b, c, ...:

2°. *Des côtés non déterminés des* m *angles donnés* A, B, C, ... *dont la somme est plus grande que* $(m-2)\pi$;

3°. *De lignes arbitraires* l, l_1, l_2, ..., *dont le nombre est arbitraire de* 1 *jusqu'à* $m+n$;

Si les figures ne dépassent aucun des espaces compris dans les m *angles, la partie convexe de cercle entre les* n *cordes* a, b, c, ..., *et les* m *angles circonscrits* A, B, C, ..., *est un maximum.*

II. *Si, au lieu d'un certain nombre de côtés ou d'angles, c'est leur somme qui est donnée, les autres conditions restant les mêmes, l'aire de la figure augmente quand on rend les éléments appartenant à la même somme égaux entre eux; il s'ensuit que pour un même périmètre, une même somme des* n *droites et une même somme des* m *angles, la figure qui a ses côtés et ses angles égaux est un maximum maximorum.*

A la limite de ces deux théorèmes, pour une certaine longueur du périmètre, la partie de cercle se change en un polygone qui est en partie inscrit et en partie circonscrit au cercle, et qui peut avoir chaque nombre de côtés depuis $n+m+1$, qui est le plus petit nombre, jusqu'au plus grand $2n+m$ ou $n+2m$ (selon qu'on a $m>n$ ou $n>m$); cela dépend de la manière dont on fait suivre les angles et les côtés dans le périmètre. Ces théorèmes renferment du reste plusieurs des précédents.

50. I. *Si les périmètres des figures contiennent, outre les parties énumérées ci-dessus* (49, I), *une droite* g *de longueur arbitraire, et si la somme des* m *angles donnés est plus grande que* $(m-1)\pi$, *la figure maxima est une partie de cercle convexe entre les cordes* a, b, c, ..., *les angles circonscrits* A, B, C, ..., *et le diamètre* g. En faisant diminuer le périmètre jusqu'à une certaine longueur, on obtient la limite des parties de cercle qui est un polygone.

II. *Le périmètre restant toujours composé comme dans* (49, I), *si l'angle* A *est plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *si l'un de ses côtés* AA_1 *et* AA_2, *par exemple* AA_1, *n'est pas compris dans la longueur donnée du périmètre, et si la somme de tous les angles est plus grande que* $(m-\frac{3}{2})\pi$, *la figure maxima est une partie de cercle entre les cordes* a, b, c, ..., *les angles circonscrits* B_1, C, ..., *la tangente* AA_2 *et la normale* AA_1.

Si le côté AA_2 était donné séparément, il faudrait qu'il fût une sécante de la partie de cercle.

III. *Si l'angle* A *est de grandeur quelconque, mais donnée, si ses deux côtés ne sont pas compris dans la partie de périmètre donnée, et si la somme des* m *angles est plus grande que* $(m-1)\pi$, *il faut que dans le maximum* A *soit un angle au centre, et que ses côtés* AA_1 *et* AA_2 *soient des rayons de la partie de cercle.*

Ce dernier théorème en renferme plusieurs autres, que l'on obtient quand on fait successivement $A=\pi$, 2π, ou quand on supprime les n côtés a, b, c, ..., ou les m angles A, B, C, ... Sa limite, que l'on ob-

tient en diminuant jusqu'à un certain point la partie de périmètre donnée, est un polygone.

Remarque générale.

51. La plupart des théorèmes précédents s'appliquent aux polygones limites des parties de cercle; mais si l'on examine ces polygones indépendamment des recherches précédentes, si l'on donne à leurs éléments variables d'autres valeurs que celles qui appartiennent aux limites des parties de cercle, on voit que, même sous ce nouveau point de vue, ces polygones-limites ne sont encore que des cas particuliers. Car quand on sort de ces valeurs-limites en assujétissant la figure à rester toujours un polygone de même nombre de côtés (qui ne doit ni contenir des arcs l, l_1, ..., ni se changer en partie de cercle), le maximum est assujéti à des conditions absolument différentes, qui changent encore, selon que les valeurs données aux éléments sont plus *grandes* ou plus *petites* que les valeurs-limites.

On parvient à ces propriétés du polygone, en discutant les cas de maximum et de minimum d'une manière plus générale et plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici; dans tous les cas où les éléments nécessaires pour la détermination complète du polygone ne sont pas tous donnés, on recherchera les conditions de maximum et de minimum relatives aux autres éléments. Le nombre des divers cas est très grand, même quand on ne s'occupe que des différentes combinaisons des côtés, des angles, de la somme de plusieurs côtés ou angles, et de l'aire. Il paraît du reste que ces recherches devront être fondées (à l'instar de la théorie sur l'égalité des polygones) sur les propriétés du quadrilatère, de manière qu'il importerait de discuter d'abord toutes les questions que le quadrilatère peut offrir; mais leur nombre s'élève jusqu'à 25 ou 30, et l'on ne pourra guère répondre, avec les moyens dont nous disposons maintenant, qu'à la moitié d'entre elles. Au surplus il est probable que les divers cas sont tellement enchaînés entre eux, qu'il suffira d'en démontrer quelques-uns; les autres découleront immédiatement de ceux-là.

Théorèmes qui concernent plusieurs figures en même temps, ou des figures qui sont déterminées par des limites fixes ou par des éléments donnés.

52. I. *Si nous appelons* S *la somme des deux figures* aα *et* bβ, *construites sur des bases* a et b, *respectivement donnees, et avec des lignes*

arbitraires α *et* β *dont la somme* $\sigma = \alpha + \beta$ *est également donnée,* S *sera un maximum lorsque les figures sont des segments de cercles de rayons égaux, pourvu que le segment ayant pour corde la plus petite base* b *soit un segment à angle aigu.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un cercle *ABC* (*fig.* 13) dans lequel les bases données *a* et *b*, prises comme cordes, soutendent des arcs α et β, dont la somme soit égale à σ, mais plus petite que la circonférence du cercle; il est clair qu'alors la somme des deux segments $a\alpha + b\beta$ est un maximum sous les conditions données. Car, la figure $ab\gamma$ restant invariable, si l'on fait varier comme on voudra les arcs α et β, mais de manière que leur somme soit toujours égale à σ, l'aire des figures renfermées par ces arcs et par l'arc fixe γ sera toujours plus petite que celle du cercle *ABC;* donc la somme des aires des deux figures formées par ces arcs et par les bases données *a* et *b* sera plus petite que celle des aires des segments du cercle $a\alpha$ et $b\beta$. Le segment $b\beta$ ayant pour base la plus petite corde, est nécessairement à angle aigu, tandis que l'autre segment peut être indifféremment ou à angle aigu ou à angle obtus.

Il reste encore à démontrer que le cercle supposé existe dans tous les cas.

Le plus petit des cercles dans lesquels les bases données *a* et *b* puissent être des cordes, est celui qui a la plus grande corde *a* pour diamètre. Supposons pour un moment que le cercle *ABC* soit ce cercle *M*, alors trois cas sont possibles, savoir:

1. $\alpha + \beta = \sigma$,
2. $\alpha + \beta > \sigma$,
3. $\alpha + \beta < \sigma$.

Dans le premier cas le cercle *M* satisfait aux conditions du théorème.

Dans le second cas faisons croître le cercle *M*, en écartant en même temps l'une de l'autre les cordes *a* et *b;* les centres de tous les cercles ainsi obtenus resteront évidemment entre les cordes *a* et *b* dans l'espace $ab\gamma$, et puisque d'après cela les deux segments sont à angles aigus, chacun des arcs α et β, et conséquemment leur somme ira continuellement en diminuant; cette somme s'approchera ainsi de plus en plus de σ, jusqu'à ce qu'elle lui devienne égale pour un certain cercle M_1 qui satisfait aux conditions du théorème.

Dans le troisième cas on fera également grandir le cercle, mais en

rapprochant en même temps la corde a de la corde b; alors le centre est dans le segment $a\alpha$, dont l'angle devient obtus, tandis que celui du segment $b\beta$ reste aigu; l'arc α croît donc et l'arc β diminue. Mais l'accroissement de α surpasse évidemment le décroissement de β: la somme $\alpha+\beta$ va donc en grandissant, et puisque en outre α peut acquérir toute grandeur voulue, tandis que β ne peut jamais devenir plus petit que b, la somme $\alpha+\beta$ obtiendra toutes les valeurs possibles et deviendra aussi égale à σ pour un certain cercle M_1, qui sera le cercle cherché.

On peut donc toujours satisfaire aux conditions du théorème, pourvu que $\sigma > a+b$, mais on ne le peut que d'une manière seulement.

Dans tous les cas le segment $b\beta$ sur la plus petite corde est constamment à angle aigu, tandis que l'autre $a\alpha$ peut être à angle aigu, droit ou obtus.

II. Le théorème ci-dessus (I) ne se rapporte qu'au maximum absolu ou principal de la somme des deux figures, qui varient autant que les éléments donnés le permettent. Si l'on veut traiter cet objet d'une manière plus complète, on s'y prendra ainsi qu'il suit:

Que l'on répartisse comme on voudra la somme σ sur α et β, parties des périmètres des figures $a\alpha$ et $b\beta$, toujours est-il que chacune d'elles, de même que leur somme S, sera un maximum, lorsque ces figures sont des segments de cercle. Nous pouvons donc admettre que les figures $a\alpha$ et $b\beta$ sont des segments de cercle. Si l'on fait maintenant varier leurs arcs α et β d'une manière continue, sous la condition que toujours $\alpha+\beta$ soit égal à σ, la somme de leurs aires $a\alpha+b\beta=S$ changera aussi continuellement; et l'on peut se demander: *Sous quelles conditions, et combien de fois cette somme devient un maximum ou un minimum?*

La discussion ultérieure de cette question donne le résultat suivant: *Si les cordes* a *et* b *de deux segments de cercle* $a\alpha$ *et* $b\beta$, *et la somme de leurs arcs* $\sigma=\alpha+\beta$ *sont données, la somme de leurs aires* $S=a\alpha+b\beta$ *est en général un maximum ou un minimum quand les arcs appartiennent à des cercles de rayons égaux; si aucun des deux segments ne doit être plus grand que le cercle entier, la condition d'avoir des rayons égaux ne peut être remplie que de trois manières au plus; mais si les segments peuvent aussi être plus grands que le cercle, le nombre des cas satisfaisant à la condition augmentera, et d'autant plus que la somme* σ *sera plus grande relativement aux cordes* a *et* b.

Pour le cas particulier où ni α ni β ne doivent être plus grands que le cercle, l'existence des cercles dans lesquels un maximum ou un minimum a lieu, peut être démontrée de la manière suivante:

Si l'on regarde les droites a et b comme cordes d'un cercle quelconque, et si l'on désigne les petits arcs qu'elles soutendent par α et β, et les grands arcs par α_1 et β_1, on peut former avec ces quantités les quatre sommes différentes $\alpha+\beta$, $\alpha_1+\beta$, $\alpha+\beta_1$, $\alpha_1+\beta_1$, et l'on aura à rechercher combien il y a de cercles dans lesquels une de ces sommes est égale à σ.

Nous avons déjà démontré ci-dessus (I) que, en ce qui concerne les sommes $\alpha+\beta$ et $\alpha_1+\beta$ dans lesquelles entre le plus petit arc β soutendu par la plus petite corde b, il y a toujours un et seulement un cercle M_1 qui satisfait à l'une ou l'autre. Il reste donc à examiner combien il y a de cercles correspondants à une des sommes $\alpha+\beta_1$ et $\alpha_1+\beta_1$, c'est-à dire au cas où le segment ayant la plus petite des bases pour cordes est à angle obtus.

Désignons par N le cercle dans lequel la somme du plus petit arc α soutendu par a, et du plus grand arc β_1 soutendu par la plus petite corde b devient un minimum $= \sigma_1$; trois relations sont alors possibles entre σ_1 et σ; on aura

(1) $\sigma_1 > \sigma$,

ou (2) $\sigma_1 = \sigma$,

ou (3) $\sigma_1 < \sigma$.

Pour le cas (1) il est clair qu'il n'y a pas de cercle qui satisfasse à la condition ci-dessus;

Pour le cas (2) le cercle N lui-même est le cercle cherché;

Pour le cas (3), enfin, il y a deux cercles qui remplissent la condition exigée; on s'en assure par le raisonnement suivant:

Il est clair que la somme des deux grands arcs $\alpha_1+\beta_1$ est un minimum dans le cercle M, qui a la plus grande corde a pour diamètre. Dans ce cas, à proprement parler, α_1 n'est plus un grand arc, car on a $\alpha_1 = \alpha$. Soit σ_2 cette somme minimum, il y a alors trois combinaisons possibles; on a

(a) $\sigma_1 < \sigma$, et en même temps $\sigma_2 < \sigma$,

ou (b) $\sigma_1 < \sigma$, $\sigma_2 = \sigma$,

ou (c) $\sigma_1 < \sigma$, $\sigma_2 > \sigma$.

Pour chacune de ces trois relations on peut, en partant des cercles N

et M, parvenir à deux cercles qui remplissent la condition ci-dessus énoncée.

A. Dans l'hypothèse (a) faisons *premièrement* croître le cercle N, la somme des arcs $\alpha+\beta_1$ croîtra de même (parce que au commencement elle est un minimum égal à σ_1, et que β_1 croît plus vite que α ne diminue), et puisque β_1 peut devenir de grandeur quelconque, tandis que α ne peut diminuer que jusqu'à la limite a, il faut qu'on parvienne à un cercle N_1 qui satisfasse à cette condition, que $\alpha+\beta_1$ soit égal à σ. — *Secondement* faisons croître le cercle M, la somme $\alpha_1+\beta_1$ croîtra avec lui, et nous parviendrons à un cercle M_2, dans lequel on aura $\alpha_1+\beta_1=\sigma$, lequel est donc le cercle en question.

B. Dans l'hypothèse (b), c'est *premièrement* le cercle M lui-même qui satisfait à la condition. — *Secondement* lorsque l'on fait croître le cercle N, $\alpha+\beta_1$ augmente en même temps jusqu'à ce que l'on parvienne enfin à un cercle N_1 dans lequel on aura $\alpha+\beta_1=\sigma$.

C. Faisons dans l'hypothèse (c) croître *premièrement* le cercle N; on parviendra comme ci-dessus à un cercle N_1 qui rend $\alpha+\beta_1=\sigma$; — *secondement* faisons diminuer le cercle N; par cela même $\alpha+\beta_1$ croîtra, et, avant d'atteindre le cercle minimum M, on parviendra à un cercle N_2 dans lequel $\alpha+\beta_1$ est égal à σ.

On démontrera géométriquement, au moyen du théorème (I), que les segments des différents cercles, qui remplissent la condition mentionnée ci-dessus, ont les propriétés suivantes:

α) Dans tous les cercles désignés par N_1, la somme des segments $a\alpha+b\beta_1$ est un maximum relatif;

β) La somme $a\alpha_1+b\beta_1$ dans les cercles M_2 et M (dans le cas B), la somme $a\alpha+b\beta_1$ dans le cercle N_2, sont des minima;

γ) Dans le cercle désigné par N, au cas spécial (2), la somme des segments $a\alpha+b\beta_1$ n'est ni un maximum ni un minimum, car ce cas peut être considéré comme limite des deux parties du cas (C), puisque les cercles N_1 et N_2 se confondent tous les deux avec le cercle N, et par conséquent neutralisent leurs propriétés opposées.

Il y a encore deux limites pour la somme des segments en question; on parvient à ces limites en faisant continuellement diminuer l'un des arcs α et β (et ici ce ne sont plus les petits arcs, mais des arcs quelconques soutendus par les cordes a et b que nous désignons par α et β); en der-

nier lieu β coïncidera avec sa corde b, ou α avec la corde correspondante a; la somme $a\alpha + b\beta$ diminue simultanément, elle est donc un minimum lorsque α ou β ont atteint leurs limites. Chacun de ces minima limites n'est composé que d'un seul segment $a\alpha'$ ou $b\beta'$, l'autre segment devenant nul; les arcs de ces segments seront relativement $\alpha' = \sigma - b$ ou $\beta' = \sigma - a$; et puisque de ces deux segments celui qui a la plus petite corde est plus petit, on a $a\alpha' > b\beta'$.

III. Ces résultats subissent différentes modifications, selon les différentes longueurs relatives des cordes a et b. Considérons, par exemple, les deux cas spéciaux suivants:

1°. Soit $a = b$; alors les cercles N et M, N_1 et M_1 se confondent, le cercle N_2 devient impossible, et quant aux autres cercles, il faut avoir égard aux relations suivantes:

α) Si l'on a $\sigma > \pi a$ ou $\sigma = \pi a$, c'est-à-dire si la somme donnée σ n'est pas plus petite que le cercle M, qui a a pour diamètre, les arcs α_1 et β $(= \alpha)$ forment pour le maximum principal (I) une circonférence entière de cercle M_1, c'est-à-dire que les segments $a\alpha_1$ et $b\beta$ composent l'aire du cercle M_1. Dans le cercle M_2, dans lequel la somme $a\alpha_1 + b\beta_1$ est un minimum (II, β), les deux segments sont égaux et tous les deux à angle obtus; leur somme est donc plus grande que l'aire du cercle M_2.

β) Si l'on a $\sigma < \pi a$, le maximum principal est le seul possible; il a lieu quand les deux segments sont égaux et à angle aigu.

Dans les deux cas les maxima limites (II) ne changent pas.

2°. Si l'on a $b = 0$, β et $b\beta$ deviennent également nuls, tandis que β_1 est la circonférence du cercle entier, et $b\beta_1$ est l'aire de ce cercle.

Dans ce cas le maximum principal n'est donc qu'un seul segment $a\alpha$ ou $a\alpha_1$, et le cercle N dans lequel la somme $\alpha + \beta_1$ $(= \alpha + \alpha_1)$ devient un minimum $= \sigma_1$ (II) est doué de la propriété particulière: *que la somme des tangentes* AD *et* BD, *menées aux extrémités de la corde* a *et se coupant en* D, *est égale à* $\alpha + \beta_1$, *c'est-à-dire qu'elle est égale à la somme du petit arc* α *et de la circonférence du cercle entier* β_1. Le minimum σ_2 de la somme $\alpha_1 + \beta_1$ qui a lieu pour le cercle M dont a est le diamètre, est alors égal à $\frac{3}{2}\pi a$.

α) Si $\sigma_1 < \sigma$, et en même temps $\sigma_2 > \sigma$ (II, C), les deux cercles N_1 et N_2 ont lieu, et comme nous avons vu que $a\alpha + b\beta_1$ (c'est-à-dire la somme du segment $a\alpha$ et du cercle entier N_1) est un maximum dans le

premier, $a\alpha_1 + b\beta_1$ est un minimum dans le second, et l'on a $N_1 > N$ et $N_2 < N$ (II, C).

β) Quand on a $\sigma_2 < \sigma$, M_2 au lieu de N_2 est le cercle dans lequel $a\alpha_1 + b\beta_1$ devient un minimum.

On peut énoncer ainsi les deux théorèmes (α) et (β):

Si l'on mène une corde AB = a *dans un cercle quelconque* β_1, *et si l'on tire par ces extrémités les tangentes* AD *et* BD, *la somme des aires du cercle entier et du segment à angle aigu est un maximum ou un minimum, selon que la somme de ces tangentes est plus petite ou plus grande que la somme de la circonférence entière et du petit arc, c'est-à-dire selon qu'on a*

$$\mathrm{AD} + \mathrm{BD} \lesseqgtr \beta_1 + \alpha;$$

il est bien entendu qu'ici l'arc α *et le cercle* β_1 *peuvent changer et avoir des rayons différents quelconques, pourvu que la corde* a *reste constante et que la somme* $\alpha + \beta_1$ *soit toujours égale à* σ.

La somme $a\alpha_1 + b\beta_1$ est de même un minimum dans tous les cas.

IV. Les corollaires suivants découlent des théorèmes précédents:

1°. Un segment à angle aigu $b\beta$ est plus grand que le secteur $C\gamma$ dans le même cercle C si l'arc du secteur est égal au double de la différence entre l'arc et la corde du segment, c'est-à-dire si $\gamma = 2(\beta - b)$. — Ce théorème est du reste pareillement applicable aux segments qui surpassent le demi-cercle jusqu'à un certain segment à angle obtus qui est précisément égal au secteur, et au-delà duquel le secteur devient plus grand que le segment. — De même la différence entre les aires du cercle et du polygone convexe inscrit est plus grande qu'un secteur dont l'arc est égal à deux fois la différence entre les périmètres de ces figures, si toutefois le centre C du cercle n'est pas en dehors du polygone. De même la différence de deux segments à angles aigus $b\alpha - b\beta$, ayant la même corde b, est plus grande qu'un secteur $C\gamma$ du plus petit des deux cercles, si l'on a $\gamma = 2(\alpha - \beta)$.

2°. Si trois segments de cercles $a\alpha$, $a\beta$ et $a\gamma$, sont placés du même côté de leur corde commune a, et que leurs arcs soient liés par l'équation $2\beta = \alpha + \gamma$, les aires des lunules $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ sont liées par les relations suivantes:

$$(1) \quad \text{Si} \quad \beta < \pi, \quad \text{on a} \quad \alpha\beta > \beta\gamma;$$
$$(2) \quad \text{Si} \quad \beta > \pi, \quad \text{on a} \quad \alpha\beta < \beta\gamma.$$

53. *Les conditions restant les mêmes que dans le théorème* (52, I), *sauf que la somme* $s = a + b$ *est donnée au lieu des bases* a *et* b, *la somme* S *des deux segments* $a\alpha$ *et* $b\beta$ *est d'autant plus petite que la différence entre* a *et* b *est plus petite, de manière que la somme* S *est un minimum maximorum, lorsqu'on a* $a = b = \frac{1}{2}s$, *et que cette somme devient la plus grande possible ou un maximum limite, lorsque, par exemple, on a* $a = s$ *et* $b = 0$; *alors c'est le segment* $a\alpha$ *qui est ce maximum, tandis que* $b\beta$ *est nul.*

Démonstration. Prenons a et b de grandeurs quelconques, mais différentes; soit pour fixer les idées $a > b$ (*fig.* 14), et admettons que les segments $a\alpha$ et $b\beta$, dont la somme représente dans ce cas le maximum principal, appartiennent à un même cercle, et que leurs cordes AC et BC, c'est-à-dire a et b, aient une extrémité C commune. Soit en outre $a_1 + b_1 = a + b = s$, et de plus $a_1 - b_1 < a - b$; on aura d'abord le triangle $AC_1B > ACB$ (3). Imaginons les segments de cercle $a_1\alpha_1$ et $b_1\beta_1$, construits sur les bases a_1 et b_1, dont la somme est le maximum dans ce cas; les trois arcs α_1, β_1 et γ forment une figure plus petite que le cercle isopérimètre $\alpha\beta\gamma$, et puisque cette figure est composée des segments $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c\gamma$ et du triangle AC_1B, il faut que $a_1\alpha_1 + b_1\beta_1$ soit plus petit que $a\alpha + b\beta$.

54. *Étant données les droites* a, b, c, d, ..., *bases d'un nombre quelconque de figures* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, ..., *et la somme* $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, ..., *des lignes* α, β, γ, δ, ..., *qui complètent leurs périmètres, la somme de leurs aires ne peut être un maximum que quand ces figures sont toutes des segments de cercles égaux; il faut en outre, pour le maximum principal, que le segment ayant la plus grande base puisse seul être à angle obtus.*

Ce théorème découle du précédent (52, I).

On peut se demander s'il n'y a pas plusieurs cas dans lesquels les figures satisfassent aux conditions du théorème, qui consistent en ce que ces figures soient des segments de même cercle, et qu'aucune d'elles ou que celle seulement qui a la plus grande corde soit à angle obtus; et si dans chacun de ces cas la somme des aires est un *maximum?*

Soit a la plus grande des bases, et M le plus petit cercle que nous puissions considérer, c'est-à-dire soit M le cercle qui a cette base a pour diamètre: inscrivons dans ce cercle les autres bases b, c, d, ..., comme

cordes; appelons β, γ, δ, ... les plus petits arcs qui leur correspondent et α, α_1 les arcs correspondants à a (α_1 deviendra le plus grand arc, quand nous ferons croître dans la suite le cercle); trois relations sont alors possibles: on a

$$(1)\qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots. < \sigma,$$

ou

$$(2)\qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots. = \sigma,$$

ou

$$(3)\qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots. > \sigma.$$

I. Dans la première hypothèse faisons croître le cercle M et prenons α_1 au lieu de α; on parviendra toujours à un cercle M_2 dans lequel on aura

$$\alpha_1+\beta+\gamma+\delta+\ldots. = \sigma;$$

car, supposé même que la somme $\beta+\gamma+\delta+\ldots.$ décroisse au commencement plus que l'arc α_1 ne croît, l'inverse devra pourtant arriver plus tard, puisque α_1 peut grandir jusqu'à l'infini, tandis que $\beta+\gamma+\delta+\ldots.$, ne peut diminuer jusqu'à la limite $b+c+d+\ldots.$ La somme pourra donc toujours atteindre la grandeur donnée σ; mais il est clair qu'il n'y a qu'une seule manière de remplir la condition.

II. Dans le second cas (2) le cercle M lui-même satisfait, et si α_1 augmente au commencement moins rapidement que la somme $\beta+\gamma+\delta+\ldots.$, ne diminue, l'on parvient en outre, comme ci-dessus (I), à un cercle M_1 dans lequel on a

$$\alpha_1+\beta+\gamma+\delta+\ldots. = \sigma.$$

III. Dans le troisième cas on obtient d'abord, en faisant croître le cercle M, un cercle M_3, dans lequel on a

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots. = \sigma,$$

car tous ces arcs, α, β, γ, ..., diminuent. Si en outre α_1 augmente au commencement moins rapidement que la somme $\beta+\gamma+\delta+\ldots.$, ne diminue, de manière que la somme $\alpha_1+\beta+\gamma+\ldots.$, soit d'abord décroissante, il faut qu'il y aît un certain cercle M_m, dans lequel cette somme devient un minimum $=\sigma_1$, et au-delà duquel elle commence à croître indéfiniment, puisque l'arc α_1 n'a pas de limite. Donc, si σ_1 est plus petit que σ, il doit y avoir entre M et M_m un cercle M_2, dans lequel $\alpha_1+\beta+\gamma+\ldots.$, est égal à σ, et, le cercle augmentant continuellement, on trouvera encore, après avoir dépassé M_m, un cercle M_1 dans lequel on aura $\alpha_1+\beta+\gamma+\ldots. = \sigma$.

Les différents cercles que nous venons de signaler offrent les propriétés suivantes:

a) Dans tous les cercles désignés par M_1, la somme des segments $a\alpha_1$, $b\beta$, $c\gamma$, ..., est un maximum; de même la somme $a\alpha+b\beta+c\gamma+\dots$ est un maximum dans le cercle M_3.

b) Dans le cercle M_2 la somme $a\alpha_1+b\beta+c\gamma+\dots$. est un minimum.

Si dans le cas III, σ_1 est égal à σ, les cercles M_2 et M_1 se confondent avec le cercle M_m, qui ne peut en conséquence offrir ni un minimum, ni un maximum.

Il reste à examiner lequel des deux maxima (III), qui ont lieu en même temps dans les cercles M_1 et M_3, est les plus grand ou le maximum principal.

Remarque. Le théorème précédent peut servir entre autres à résoudre le problème suivant:

Entourer un polygone convexe donné avec un fil flexible de longueur aussi donnée σ, de manière qu'il passe par tous les sommets des angles de ce polygone et qu'il comprenne un espace maximum.

A l'égard des figures sphériques, on peut énoncer le problème de la manière suivante:

Un certain nombre de points fixes étant donnés sur la limite d'un pays, et le périmètre étant aussi donné, déterminer les frontières de manière que l'aire comprise soit un maximum.

55. *Si l'on suppose que les figures du théorème précédent soient des segments de cercle et qu'ils puissent être indistinctement plus grands ou plus petits que le cercle entier, leur somme, les autres conditions restant les mêmes, est un maximum ou un minimum, aussi souvent que leurs arcs ont le même rayon.*

On verra aisément que le nombre de cas dans lesquels ces conditions peuvent être satisfaites est très grand, et même encore, quand on exclut les segments plus grands que le cercle, et que l'on peut seulement prendre le plus grand ou le plus petit segment correspondant à chaque corde. Pour reconnaître si certains cercles sont possibles ou non, on se servira de cercles auxiliaires, pareils au cercles M_m, employé dans le n° 54, III; ces cercles, qui doivent avoir la propriété que la somme des arcs soutendus par les cordes donnés *a*, *b*, *c*, ..., soit un minimum, seront l'objet d'un problème préliminaire; toutefois, pour chacune des cordes, on dira d'avance si l'on aura à prendre le plus grand ou le plus petit arc. Il faudra recher-

cher leur propriété caractéristique, qui est la suivante pour un cas très particulier.

Soient les cordes données égales $a = b = c = \ldots$, *en nombre impair* $2n+1$; *si on les inscrit à un cercle variable* M_m, *et que l'on ajoute les plus grands arcs* α_1 *de* n *cordes aux petits arcs* α *des autres* $n+1$ *cordes, la somme totale* $n\alpha_1 + (n+1)\alpha$ *est un minimum, quand elle est égale à la somme* $AD+BD$, *des tangentes* AD, BD *menées aux extrémités de l'une des cordes* a.

Un théorème analogue à celui du n° 52, III, 2°, découle de cette propriété.

56. Les théorèmes 52 et 54 se prêtent à un grand nombre d'applications, que nous allons indiquer, les unes en peu de mots et les autres avec détail.

Nous remarquerons d'abord que, pour les parties de cercle les plus compliquées, on peut établir des théorèmes analogues à celui du n° 52, qui ne se rapporte qu'à la partie de cercle la plus simple.

Nous allons énoncer ces théorèmes sommairement, sans les discuter un à un.

I. *La somme des aires de deux figures* F *et* F_1, *dont le périmètre de chacune est composé d'un certain nombre de lignes en partie données, et en parties arbitraires, comme dans les théorèmes depuis n° 21 jusqu'à n° 50, et dont la somme des périmètres est donnée, ne peut être un maximum que lorsque ces figures sont des parties de cercles à rayons égaux; ou si ces figures sont supposés être des parties de cercle, la somme de leurs aires est en général un maximum ou un minimum toutes les fois qu'elles appartiennent à des rayons égaux.*

Il est facile de vérifier cette assertion au moyen du théorème 52, I. Pour que la somme $F+F_1$ devienne un maximum, ces figures doivent être d'abord des parties de cercle; elles contiendront donc des arcs L et L_1; puis si dans l'étendue de ces arcs on retranche de ces figures deux segments à angles aigus $a\alpha$ et $b\beta$, et que l'on suppose pour un moment que les cordes a et b et la somme des arcs $\alpha+\beta$ soient données, la somme des segments $a\alpha + b\beta$ doit être un maximum; donc les arcs α et β, et conséquemment aussi les arcs L et L_1, ont des rayons égaux.

II. *Si l'on exige que les figures* F *et* F_1, *dont la somme des périmètres est donnée, soient des parties de cercle seulement entre des angles*

circonscrits donnés (que par conséquent leurs périmètres ne contiennent pas de cordes données), la somme de leurs aires est un minimum lorsqu'elles ont des rayons égaux. Les deux maxima limites ont lieu quand l'une ou l'autre des figures devient nulle. On pourrait chercher lequel est le plus grand. Quand F et F_1 sont des parties de cercle dans un seul angle circonscrit, F dans A et F_1 dans B, ces limites sont isopérimètres, et alors F_1 est plus petit que F si l'on a $A > B$.

Ce même théorème (II) peut encore être considéré, quant aux figures planes, comme un cas particulier du suivant:

III. *La somme des aires de deux figures* F *et* F_1 *qui sont données de forme, c'est-à-dire qui doivent être semblables à deux autres figures données* f *et* f_1, *et dont la somme des périmètres* $\mathrm{U}+\mathrm{U}_1$ *est donnée, est un minimum quand ces aires sont proportionnelles aux périmètres, c'est-à-dire quand* $\mathrm{F}:\mathrm{F}_1=\mathrm{U}:\mathrm{U}_1$.

Le théorème du n° 54 sert à étendre ces propositions (I et II) à un nombre quelconque de parties de cercle arbitraires.

On déduira encore immédiatement des théorèmes 52 et 54 la série suivante de propositions, concernant des figures qui dépendent d'éléments fixes ou qui sont renfermées entre des limites fixes.

57. I. *Si le périmètre donné* U *d'une figure doit passer par les extrémités d'une droite donné* $\mathrm{AB}=\mathrm{a}$ (*fig.* 15), *et si ce périmètre est plus petit que la circonférence du cercle, dont* a *est le diamètre, en sorte que* U *soit plus petit que* $\pi\mathrm{a}$, *l'aire de la figure est un maximum lorsqu'elle est composée de deux segments de cercle égaux* $\mathrm{a}\alpha$ *et* $\mathrm{b}\beta$, *construits sur la corde* AB.

Si l'on a $U=\pi a$, ou $U>\pi a$, la condition que le périmètre passe par A et B, ne détermine plus la forme de la figure, qui est alors un cercle.

II. *Si le périmètre* U *est de longueur constante, tandis que la droite* a *augmente ou diminue, l'aire diminue ou augmente en même temps* (33). Si a a diminué jusqu'à ce qu'on ait $U=\pi a$, l'aire ne change plus, car la figure reste alors constamment un cercle.

58. I. Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés d'une droite G de longueur arbitraire et d'une ligne L de forme arbitraire, mais de longueur donnée, et qui doit passer par un point A placé de manière que la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite G soit égale à une longueur donnée p, si L est plus petit que $p\pi$; entre toutes ces

figures, dis-je, la figure maxima est celle dans laquelle la ligne L est composée de deux arcs de cercle égaux α et β qui ont leurs centres sur G (57, I). — Si l'on a au contraire $L = p\pi$, ou $L > p\pi$, la figure est toujours un demi-cercle dont L est la demi-circonférence et G le diamètre.

II. L'aire d'une figure dont le périmètre se compose d'une droite donnée et fixe AB, d'une autre droite fixe G, mais de longueur arbitraire, et de deux lignes quelconques α et β, dont la somme σ est donnée, et qui joignent les deux extrémités de la droite AB à des points quelconques de la droite G, cette aire ne peut être un maximum que lorsque la droite G est normale aux arcs α et β qui sont des arcs de cercle à rayons égaux.

Si un angle fixe GH est donné au lieu de la droite G, et si la droite fixe AB est comprise dans l'espace de cet angle, α et β doivent être respectivement normales à ses côtés G et H, et avoir des rayons égaux.

III. Si l'on exige que le périmètre d'une figure soit composé d'une droite fixe G de longueur arbitraire et d'une ligne L donnée de longueur seulement, et que cette ligne L passe par un certain nombre de points donnés A, B, C, ..., qui sont tous placés du même côté de la droite G, cette figure ne peut être un maximum que lorsque toutes les parties de la ligne L, soit qu'elles joignent deux points fixes consécutifs, soit qu'elles joignent le premier et le dernier point fixe aux extrémités de la droite G, sont des arcs de cercle à rayons égaux (54), et lorsque ces dernières deux parties tombent normalement sur la droite G (I).

Il existe un théorème analogue pour le cas où un angle GH est donné au lieu de la droite fixe G, etc.

59. *Si le périmètre* L *de longueur donnée* (*fig.* 16) *doit passer par un point* A *et se terminer à une ligne* G, *donnée de position, et si l'on a* $L < \pi a$, *où nous désignons par* a *la perpendiculaire* AB *abaissée de* A *sur* G, *l'aire de la figure renfermée est un maximum, lorsque* L *est composé de deux arcs de cercle à rayons égaux* α *et* β, *qui ont la droite* AB *pour corde commune et qui par conséquent coupent sous des angles égaux la droite* G. — *Si l'on a* $L = \pi a$ *ou* $L > \pi a$, *la figure en question est toujours un cercle* ACD, *tangent à la droite* G.

60. *Soient données de position deux droites parallèles* G *et* H (*fig.* 17), *dont la distance perpendiculaire est égale à* a; *soit en outre donnée la longueur* L *du périmètre d'une figure, lequel doit être tracé de manière à atteindre aux deux droites sans les dépasser, et peut avoir*

de commun avec chacune d'elles ou un seul point ou une partie quelconque de sa longueur; l'aire de la figure renfermée est, selon les différentes longueurs du périmètre donné, un maximum quand elle a les formes suivantes:

1°. *Si l'on a* $L = \pi a$: *le cercle* $\gamma\gamma$, *tangent à* G *et* H, *dont* a *est le diamètre, est un maximum;*

2°. *Si l'on a* $L < \pi a$: *le périmètre de la figure maxima est composé de deux arcs de cercle égaux* α *et* β, *qui ont la perpendiculaire* $AB = a$ *pour corde commune, et qui coupent les droites* G *et* H *sous des angles égaux;*

3°. *Si l'on a* $L > \pi a$: *le maximum est limité par deux demi-cercles* α_1 *et* β_1, *tangents à* G *et* H, *c'est-à-dire appartenant au diamètre* a, *et par les deux droites* CD *et* EF, *parties égales de* G *et* H.

61. *Si le périmètre d'une figure est composé d'une droite* AB *d'une longueur donnée* 2b *et de position fixe (fig.* 18), *et d'une ligne quelconque* L, *donnée de longueur seulement; si l'on exige en outre que la ligne* L *ne dépasse jamais une droite* G, *parallèle à la droite* AB *à la distance* a, *mais que toujours elle y atteigne en un point ou qu'elle ait une certaine partie commune avec cette droite; la figure ainsi formée, pour être un maximum, devra prendre des formes différentes selon les différentes longueurs de la ligne* L, *savoir:*

1°. *Pour la plus petite valeur le* L, *que nous désignons par* 2c, L *se compose de deux droites égales* AC *et* BC, *et la figure est un triangle isoscèle* ACB, *limite des figures en question;*

2°. *Pour une certaine longueur* γ, L *se change en un arc de cercle* ACB, *auquel la droite* G *est tangente en* C; *la figure est un segment de cercle* $A\gamma C\gamma B$;

3°. *Pour une certaine longueur* $2b + \pi a$, L *se compose de deux demi-cercles égaux* δ *et* ε *et de la partie* DE, *qui lui est commune avec la droite* G; *ces demi-cercles sont tangents à la ligne* G *en* D *et en* E, *et leurs diamètres, qui sont de longueur* a, *sont perpendiculaires aux deux droites données; la figure maxima est donc composée dans ce cas d'un rectangle* ADEB *et des deux demi-cercles* $A\delta D$ *et* $B\varepsilon E$.

Dans les longueurs intermédiaires et au-delà de la plus grande, la figure se transforme de la manière suivante:

4°. *Si l'on a* $\gamma > L > 2c$, *la ligne arbitraire* L *est composée de*

deux arcs de cercle égaux α *et* β, *qui coupent la droite* G *dans le même point connu* C *et sous des angles égaux;*

5°. *Si l'on a* $\gamma < L < 2b + \pi a$, *elle se compose de deux arcs de cercle égaux* α_1 *et* β_1 *tangents à la droite* G *en* A_1 *et* B_1 *et d'une droite* A_1B_1, *dont le milieu est sur le point fixe* C;

6°. *Si* $L > 2b + \pi a$, *la ligne* L *est composée de deux arcs de cercle* α_2 *et* β_2 *de même rayon et de la droite* A_2B_2, *qui est de longueur constante* 2b, *mais variable de position; les deux arcs sont tangents à la droite* G *en* A_2 *et* B_2 *et forment ensemble un cercle entier; le plus grand des arcs peut indifféremment être placé en* A *ou en* B.

Dans tous ces cas il est bien facile de déterminer les aires au moyen des valeurs données de *a, b* et *L;* dans le dernier cas, par exemple, l'aire de la figure est égale à

$$2ab + \frac{(L-2b)^2}{4\pi}.$$

II. *Si la droite* G *a une position fixe quelconque (on suppose qu'elle ne passe pas entre les extrémités de la droite* AB), *si par exemple elle est plus éloignée de* B *que de* A (*fig.* 19), *la ligne* L *prend les différentes formes suivantes pour que la figure renfermée soit un maximum dans chaque cas.*

Pour sa limite minima la ligne L *est composée de deux droites* AC *et* BC *qui coupent la droite* G *dans le même point* C *et sous des angles égaux et dont la somme est moindre que la somme des deux droites qui joignent tout autre point de la droite* G *avec les points* A *et* B; *quand on a* $L > AC + BC$, *elle est formée par deux arcs de cercle* α *et* β *de même rayon* r, *qui coupent la droite* G *dans le même point* D (*placé entre* C *et* E) *et sous le même angle* φ; *si* L *continue de croître, le point* D *se meut de* C *vers* E, *tandis que le rayon* r *et l'angle* φ *diminuent; quand la ligne* L *a atteint une certaine longueur* ε, *elle n'est plus qu'un seul arc de cercle* AεEεB, *tangent en* E *à la droite* G, *et l'angle* φ *est nul;* φ *reste nul pendant l'acroissement ultérieur de* L, *et dès-lors la ligne* L *est composée de deux arcs de cercle* α_1 *et* β_1 *de même rayon* r, *qui sont tangents à la droite* G *en* A_1 *et* B_1, *et de la droite* A_1B_1; *ces deux points* A_1 *et* B_1 *s'éloignent d'abord du point* E, *en s'approchant respectivement des points* C *et* F, *tandis que le rayon* r *décroît; chacun des arcs* α_1 *et* β_1 *est plus petit que la demi-circonfé-*

rence; enfin on arrive au point où l'arc β_1 *devient une demi-circonférence, décrite sur le diamètre* BF, *qui est la perpendiculaire abaissée du point* B *sur la droite* G; *là le rayon* r *est un minimum, le point* B_1 *tombe en* F *et le point* A_1 *atteint sa distance maxima au point* E *dans la direction* EC; *si* L *continue de croître, l'arc* β_1 *devient de plus en plus grand et* α_1 *de plus en plus petit par rapport à la demi-circonférence correspondante, le point* A_1 *marche dès lors dans le même sens que* B_1, *et le rayon* r *et la partie droite* A_1B_1 *croissent indéfiniment.*

62. *Si l'on doit construire une figure* F *de périmètre donné sous la condition qu'elle ait avec chacun des côtés d'un polygone donné* P, *ou un point commun ou une partie commune; pour que l'aire de la figure inscrite soit un maximum, il faut que toutes les parties de son périmètre, qui joignent deux côtés consécutifs du polygone* P, *soient des arcs de cercles égaux, et que les deux arcs qui coupent un même côté du polygone* P *forment avec lui des angles égaux qui seront nuls, quand le côté respectif a une certaine partie commune avec le périmètre de la figure* F, *ou quand les deux arcs ont le même centre* (61, II).

63. I. Quand on fait varier le périmètre de la figure *F* inscrite, tandis que le polygone *P* reste le même, il est difficile de déterminer d'une manière générale les limites de ce périmètre et la forme correspondante de la figure *F,* principalement si l'on admet que *P* puisse être un polygone quelconque. La difficulté reste la même quand on ne désigne par *P* que des polygones convexes, et quand on suppose en même temps que la figure *F* soit comprise dans leurs espaces intérieurs; car il y a des cas où cette condition est contraire à la nature du problème. On sait bien que le périmètre de la figure *F* aura alors une limite supérieure, qui est le périmètre du polygone *P* lui-même; mais la forme de sa limite inférieure, du minimum du périmètre de *F,* dépend des propriétés du polygone *P.* Il y a pourtant certains cas dans lesquels la figure se transforme à cette limite en un polygone rectiligne F_1 inscrit au polygone *P,* et du même nombre de côtés. Les côtés du polygone F_1 peuvent être considérés comme des arcs de cercle d'un rayon infini, et chacun des côtés du polygone *P* doit former des angles égaux avec les deux côtés du polygone F_1 qui le coupent. C'est en conséquence de cette propriété que *le périmètre du polygone* F_1 *est un minimum entre ceux de tous les polygones inscrits au polygone donné* P (ou, comme on le verra dans la suite, qu'il est du moins un des

polygones à périmètre minimum). Il reste à voir si réciproquement un polygone inscrit F_1, qui remplit la condition que ses angles extérieurs soient divisés en deux parties égales par les côtés du polygone P, peut toujours être considéré comme limite de la figure F. Pour cela, il faut savoir s'il est toujours possible d'inscrire à chaque polygone P donné un autre polygone F_1 qui ait cette propriété; ou bien si le polygone P doit répondre à certaines conditions pour que cela soit possible; et enfin, quand F_1 est inscriptible, s'il présente vraiment la limite de la figure F.

On se convaincra facilement que, dans certains cas, le polygone F_1 doué des propriétés exigées, existe; car on n'a qu'à le supposer donné, et l'on aura de suite le polygone correspondant P, puisque les droites qui partagent les angles extérieurs du polygone F_1 en deux parties égales sont les côtés du polygone P.

On répond à toutes ces questions au moyen des considérations suivantes.

II. Supposons que le polygone F_1 soit inscrit au polygone P comme on l'exige; désignons les angles consécutifs de celui-ci par A_1, A_2, A_3, ..., A_m, et les angles du polygone F_1 par a_1, a_2, a_3, ..., a_m, en nommant a_1 l'angle dont le sommet est sur le côté A_1A_2, a_2 celui qui est sur le côté A_2A_3, etc. On aura alors

$$(A)\quad \begin{cases} 2A_1 = a_m + a_1, \\ 2A_2 = a_1 + a_2, \\ 2A_3 = a_2 + a_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ 2A_m = a_{m-1} + a_m. \end{cases}$$

On tire de ces équations les conséquences suivantes:

1°. *Si le nombre* m *des côtés des polygones est impair et* $=2n+1$, *les angles du polygone* F_1 *sont immédiatement déterminés par les angles du polygone donné* P; *car chacun des angles de* F_1 *est égal à la différence entre la somme des angles à indice impair et la somme des angles à indice pair du polygone* P, *en comptant chaque fois les angles de manière que des deux angles de* P, *voisins de l'angle cherché, l'un soit le premier, l'autre le dernier; en sorte que l'on a, par exemple.*

$$(B)\quad a_m = (A_1 + A_3 + \dots + A_{2n+1}) - (A_2 + A_4 + \dots + A_{2n}).$$

2°. *Si au contraire le nombre des côtés est pair, si l'on a* $m = 2n$ *les angles du polygone* F_1 *ne sont pas déterminés comme dans le premier,*

cas; mais ceux du polygone P *sont assujétis à une certaine condition, de manière que celui-ci ne peut être un polygone quelconque. Cette condition consiste en ce que la somme des angles pairs doit être égale à celle des angles impairs; on aura donc*

$$(C) \quad A_1 + A_3 + \ldots + A_{2n-1} = A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n}.$$

Dans le premier cas (1°) le polygone F_1 est toujours possible et absolument déterminé, sans que le polygone P soit assujéti à aucune condition; mais, vu la restriction *ci-dessus* (I), il cesse de représenter la limite de la figure F_1 dès qu'un de ses angles devient négatif, ce qui peut facilement arriver, comme on le voit par la forme de l'équation (*B*).

Mais dans le second cas (2°), si les angles des P remplissent la condition (*C*), le polygone F_1 n'est pas encore entièrement déterminé, car une infinité de polygones f_1 restent possibles, lesquels sont tous inscrits au polygone P sous la condition donnée et avec un périmètre minimum, c'est-à-dire qu'ils ont tous des périmètres égaux et plus petits que ceux de tout autre polygone inscrit au polygone P. Parmi tous ces polygones f_1 se trouvera aussi le polygone F_1, limite de la figure F, et ce ne peut être que celui d'entre eux dont l'aire est un maximum.

Les raisonnements suivants serviront à faire voir comment on trouvera le polygone F_1 dans les deux cas, ou les polygones f_1 dans le dernier cas, en même temps qu'ils montreront leurs propriétés d'un nouveau point de vue.

III. A. Soit donné un polygone P d'un nombre impair $2n+1$ de côtés. D'un point quelconque a, pris sur le premier côté A_1A_2, faisons partir un rayon de lumière sous un angle arbitraire α; supposons qu'il subisse sur le second côté ou une reflexion ou une réfraction telle que le rayon réfracté se propage suivant la même droite que le rayon réfléchi, mais en sens contraire; la même chose se reproduira sur le troisième, sur le quatrième côté, etc., jusqu'à ce que le rayon soit enfin rejeté du dernier côté sur un point b du premier, avec lequel il formera l'angle β. Prenons maintenant ce point b pour point de départ, le rayon sera encore réfléchi ou réfracté dans le point b même, ensuite sur tous les autres côtés, et il reviendra pour la seconde fois sur le côtés A_1A_2, qu'il rencontrera dans le point c, et sous un angle γ. Alors les relations suivantes ont lieu:

1°. *On a toujours* $\gamma = \alpha$;

2°. *Si le point de départ* a *change arbitrairement de position sur*

le côté A_1A_2, *tandis que l'angle* α *reste constant, la droite* ac *et le chemin parcouru ne changent pas de longueur; pour cela il faut qu'on prenne toutes les parties du chemin avec le signe* +, *si le rayon a été réfléchi sur tous les côtés; mais s'il a aussi été réfracté, on donnera des signes contraires aux parties du chemin parcourues avant et après la réfraction: les parties du chemin doivent donc changer de signe après chaque réfraction.*

3°. *Pour chaque angle donné* α, *il y a une position du point de départ* a, *telle que le point* b *coïncide avec lui; et, réciproquement pour chaque position du point* a, *on peut déterminer l'angle* α, *de manière que le point* b *tombe en* a.

4°. *Il existe toujours une seule grandeur de l'angle* α, *pour laquelle on* $ac = 0$, *c'est-à-dire pour laquelle le point de retour* c *coïncide avec le point de depart* a, *quelle que soit la position de celui-ci sur la droite* A_1A_2; *le chemin du rayon est alors un polygone* f_2 *de* $4n+2$ *côtés inscrit au polygone* P, *de manière qu'il y fasse deux tours et qu'il y ait deux sommets d'angles sur chacun des côtés de celui-ci. Dans ce cas l'angle* β *est égal à* α; *le rayon retourne donc après le premier circuit sous le même angle, sur le premier côté sous lequel il en est parti; les côtés de chacun des polygones* f_2 *sont dont parallèles deux à deux. Le périmètre du polygone* f_2 *est constant, si l'on a égard au sens du rayon* (2°). *Les sommets des angles* a *et* b *sont toujours également éloignés d'un point fixe* m *sur le côté* A_1A_2, *de sorte qu'on a toujours* $am = bm$, *et la même chose a lieu sur tous les côtés du polygone* P; *donc si l'on met* a *en* m, b *y tombe aussi; le rayon revient donc sur son chemin après n'avoir décrit qu'un seul tour qui est le polygone* F_1 *de* $2n+1$ *côtés; on peut donc considérer le double de celui-ci comme un des polygones désignés par* f_2: *ce polygone spécial est justement le polygone* F_1 *dont nous avons parlé ci-dessus* (II); *le double de son aire est en même temps un maximum entre les aires des polygones* f_2.

B. Soit donné un polygone P d'un nombre pair $2n$ de côtés. Supposons que d'un point a, pris sur le premier côté A_1A_2, parte un rayon de lumière sous un angle arbitraire α, qu'il se meuve comme ci-dessus, et qu'après un premier tour il retombe sous un angle β sur un point b du même côté A_1A_2, etc. Alors ont lieu les lois suivantes:

1°. *On a toujours*

$$\alpha - \beta = (A_1 + A_3 + \dots + A_{2n-1}) - (A_2 + A_4 + \dots + A_{2n}) = u.$$

2°. *Si la différence* u *est commensurable avec* π, *le rayon de lumière retournera sur le premier côté après un certain nombre de tours sous le même angle qu'il en était parti au commencement; s'il y arrive donc dans le point* t *et sous l'angle* τ, *on aura* $\tau = \alpha$; *si* α *reste constant tandis que le point* a *change de position, le chemin du rayon et la droite* at *restent aussi constants, etc.*

3°. *Soit* $\mathrm{u} = 0$, *c'est-à-dire soit la somme des angles pairs du polygone* P *égale à la somme de ses angles impairs; alors on a* $\beta = \alpha$, *c'est-à-dire que le rayon revient déjà après un seul tour rencontrer le premier côté sous le même angle sous lequel il est parti. Si le point* a *change de position, sans que la grandeur de l'angle* α *varie, le chemin du rayon et la distance des deux points* a *et* b *restent constants. Quelle que soit la position du point* a, *il y a toujours un angle correspondant* α, *qui fait que* b *tombe sur* a; *le rayon décrit donc toujours un polygone* f_1 *du même nombre de côtés et du même périmètre, qui est inscrit au polygone donné* P: *parmi ces polygones* f_1 *qu'on peut obtenir ainsi, se trouve celui que nous avons désigné ci-dessus* (II) *par* F_1 *et qui est la limite de la figure* F; *c'est celui d'entre eux dont l'aire est un maximum et qui jouit en même temps de la propriété que la somme de ses côtés pairs est égale a la somme des côtes impairs; par-là le polygone* F_1 *est parfaitement déterminé.*

C. Remarquons d'abord que le premier théorème (A), qui se rapporte aux polygones à nombre de côtés impair, peut être considéré comme un cas spécial du second théorème (B, 3°); car puisqu'on est obligé de faire deux tours dans ces polygones (A), cela revient parfaitement au même que si le polygone P était du nombre double $4n+2$ de côtés et qu'on ne fît qu'un seul tour; on satisferait toujours à la condition $u = 0$. La construction suivante est donc indistinctement applicable aux polygones f_1 et f_2; elle découle des propriétés suivantes:

1°. Les côtés homologues des polygones f_1 sont parallèles entre eux (à cause de l'angle constant α);

2°. Quand la position d'un quelconque des côtés est donnée, celle des autres côtés se trouve aussi déterminée: donc le polygone entier est connu dans ce cas;

3°. Le premier côté $a_1 a_2$ de l'un des polygones f_1, dont les deux extrémités a_1 et a_2 se trouvent sur les premiers deux côtés $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$

du polygone *P*, peut passer par un point quelconque donné p_1; on trouvera ce côté de la manière suivante:

„Du point donné p_1 on abaissera une perpendiculaire p_1q_1 sur le „second côté A_2A_3 du polygone *P*, et on prendra sur son prolongement „un point p_2 tel que l'on ait $p_2q_1 = p_1q_1$; du point p_2 on abaissera de même „une perpendiculaire p_2q_2 sur le troisième côté A_3A_4, et on prendra sur „son prolongement le point p_3 tel que $p_3q_2 = p_2q_2$; on répétera la même „opération sur tous les côtés du polygone *P*, jusqu'à ce qne l'on parvienne „au point p_{m+1} moyennant la perpendiculaire abaissée du point p_m sur le „premier côté A_1A_2; ce point (p_{m+1}) se trouve sur le côté demandé a_1a_2 „ou sur son prolongement; ce côté est donc parfaitement déterminé par la „position connue des deux points p_1 et p_{m+1}."

On construira donc dans les deux cas, d'abord un quelconque des polygones f_1 ou f_2, et l'on en déduira facilement le polygone spécial F_1.

Il y a encore une autre construction qui s'applique seulement aux polygones f_2 d'un nombre de côtés impair, car dans ceux-ci on peut trouver immédiatement l'angle α au moyen des angles du polygone donné *P* (II, 1°).

64. Il ne sera pas inutile de considérer encore les cas spéciaux suivants.

I. Si le polygone donné *P* (63, III, B, 3°) est un quadrilatère *ABCD*, il faut qu'il soit inscriptible à un cercle (parce qu'on a $A+C=B+D$). On trouvera les quadrilatères inscrits f_1 de périmètre minimum au moyen d'un autre procédé plus simple que le précédent; on construira d'abord le quadrilatère spécial F_1, limite de la figure *F*, et qui a l'aire maxima de la manière suivante:

„Dans le quadrilatère *ABCD* tirez les diagonales *AC* et *BD*; de „leur point d'intersection *E* abaissez sur les côtés du quadrilatere les per„pendiculaires *Ea*, *Eb*, *Ec* et *Ed*; les points *a*, *b*, *c*, *d* sont les sommets „des angles du quadrilatère cherché F_1."

Le quadrilatère *abcd* ou F_1 est *circonscriptible à un cercle qui a son centre en* E.

Pour obtenir les autres quadrilatères f_1 ou $a_1b_1c_1d_1$, on prend un point arbitraire a_1 et l'on fait les côtés a_1b_1, b_1c_1, etc., parallèles aux côtés homologues *ab*, *bc*, etc., du quadrilatère *abcd*.

II. Si le polygone donné *P* (n° 62) est un triangle *ABC*, et si

la figure inscrite F doit être comprise dans son espace intérieur, le périmètre L de la figure F aura les formes et les limites suivantes:

1°. *Pour une certaine longueur* a *de* L, *la figure est le cercle inscrit au triangle;*

2°. *Si l'on a* $L > a$, *ce périmètre est composé de trois parties des côtés du triangle et de trois arcs de cercle du même rayon, dont chacun a pour tangentes deux côtés du triangle;*

3°. *Si l'on a* $L < a$, *le périmètre est composé de trois arcs de cercle de rayons égaux, qui forment un triangle curviligne* $\alpha\beta\gamma$, *inscrit au triangle* ABC; *chacun des côtés de celui-ci est coupé sous des angles égaux par les deux côtés adjacents du triangle inscirt; les droites qui partagent les trois angles du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *en deux parties égales, se rencontrent en un seul point* D. *Si le triangle donné* ABC *est à angles aigus, la limite inférieure de* $\alpha\beta\gamma$ *ou* F, *que nous avons désignée par* F_1 (63), *est le triangle rectiligne* abc, *que l'on obtient en joignant les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle* ABC *sur les côtés opposés. Le triangle* abc *a donc le périmètre minimum entre tous les triangles inscrits au triangle donné* ABC; *les droites qui partagent ses angles en deux parties égales, sont en même temps ces perpendiculaires desquelles nous venons de parler et qui se coupent en* D; *ses angles extérieurs sont partagés en deux moitiés par les côtés du triangle* ABC.

Remarque. Ces théorèmes se rapportent également aux triangles plans et sphériques. Mais ce serait l'objet d'une recherche particulière de voir si les théorèmes concernant le quadrilatère $ABCD$ (I) et les polygones P, f_1 et f_2 (63) peuvent aussi être transportés aux figures sphériques ou s'il faudra y apporter certaines modifications; car il est clair qu'un polygone F_1 à périmètre minimum et qui est la limite de la figure F, existe aussi sur la sphère, et que l'on obtiendra le polygone P par la construction donnée ci-dessus (63, 1) si le polygone F_1 est donnée.

65. Jusqu'ici nous avons supposé que tous les côtés du polygone P soient des droites données; mais on pourrait employer de même un polygone curviligne ou une courbe quelconque P_1. Le théorème paraît alors être plus général, mais pourtant il n'est qu'une conséquence du théorème précédent; c'est pourquoi les propriétés principales de la figure F restent les mêmes.

Pour que la figure F soit donc un maximum, les conditions suivantes doivent être remplies; il faut:

1) *Que toutes les parties du périmètre qui joignent des côtés courbes consécutifs de* P_1 *soient des arcs de cercles égaux;*

2) *Que les deux arcs qui rencontrent un même côté de* P_1, *le coupent dans le même point et sous des angles égaux, ou qu'ils lui soient tangents en deux points différents.*

Ce théorème ne s'applique pas seulement aux figures situées dans un plan ou sur une sphère, mais il a lieu quelle que soit la surface courbe sur laquelle elle se trouve.*)

Voici l'énoncé de ce théorème général:

„*Un nombre arbitraire de courbes ou un polygone curviligne* P_1 „*étant donné sur une surface courbe* S *quelconque, on doit lui inscrire* „*une figure* F *de périmètre donné, qui ait avec chacun des côtés de* P_1, „*ou un point ou une partie commune, et dont l'aire soit un maximum;* „*elle aura les propriétés caractéristiques suivantes:*

„1°. *Si l'on mène la surface développable, tangente à la sur-* „*face* S, *suivant une de ces parties du périmètre de la figure* F, *qui* „*joignent deux côtés consécutifs de* P_1, *et si on la développe ensuite, il* „*faut que cette partie donne un arc de cercle;*

„2°. *Tous les arcs de cercle que l'on obtient de cette manière* „*seront de même rayon;*

„3°. *Enfin, les deux lignes qui font partie du périmètre de* F, *et* „*qui rencontrent un même côté de* P_1, *doivent, ou le couper dans le* „*même point et sous des angles égaux, ou lui être tangents en deux* „*points différents.*"

66. La figure F pourra toujours se transformer à sa limite en un polygone F_1, dont les côtés sont les lignes les *plus courtes* sur la surface S et qui donnent des *droites* par le développement; le périmètre de ce polygone F_1 est en même temps un maximum ou un minimum entre ceux de tous les polygones que l'on peut inscrire au polygone P_1 avec les lignes les plus courtes. Il paraît même qu'en général, si réciproquement le péri-

*) J'ai déjà fait connaître ce théorème dans une autre occasion. Voyez les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Berlin, avril 1839; et le journal *l'Institut*, année 1839.

mètre d'un polygone F_1, inscrit au polygone P_1 avec les lignes les plus courtes, est un maximum ou un minimum, ce polygone est la limite de la figure F. Mais le cas spécial suivant fait en quelques sorte une exception à cette règle.

Si l'on désigne par P_1 un système de m courbes ou un polygone curviligne de m côtés, situé dans un plan, F_1 sera un polygone rectiligne. Mettons dans les sommets de tous les angles de F_1 des tangentes à ces courbes; elles formeront un polygone P, qui sera avec le polygone F_1 dans la relation du n° 63. Car le polygone F_1 est aussi la limite de la figure F inscrite à ce polygone P; donc son périmètre est un minimum entre ceux de tous les polygones inscrits à P; ses angles extérieurs sont divisés en deux parties égales par les côtés de P; et enfin si le nombre des côtés est pair, si l'on a $m=2n$, la somme des angles à indices pairs du polygone P doit être égale à la somme de ses angles à indices impairs. Dans ce cas, la somme des côtés à indices pairs du polygone F_1 doit aussi être égale à la somme de ses côtés à indices impairs (63, III, B, 3°). Donc un polygone f_1 à périmètre minimum, inscrit au polygone courbe P_1 de $2n$ côtés, n'est pas nécessairement la limite de la figure F; pour cela il faut encore que la somme de ses côtés pairs soit égale à la somme des côtés impairs.

Cette exception n'a pas lieu si m est impair ou si l'on a $m=2n+1$; pour ce cas nous avons le théorème spécial suivant:

Si les sommets des angles d'un triangle abc *(ou* F_1*) sont respectivement sur trois courbes données* A, B, C *(ou* P_1*), il faut, pour que son périmètre soit un maximum ou un minimum, que les normales à ces courbes, menées par les sommets des trois angles du triangle, divisent ces angles en deux parties égales; elles se rencontreront donc en un seul point; ou bien la normale dans chaque sommet doit rencontrer en un même point les tangentes dans les autres sommets.*

Ce théorème s'applique à la sphère d'une manière analogue.

67. On peut encore varier de plusieurs manières les données pour les figures comprises dans un plan. Par exemple, soit donnée une seule courbe P_1, au lieu des m courbes du cas précédent; on demande quelle est la figure F; ou quel est le polygone rectiligne f_1, inscriptible sous les mêmes conditions. On aura alors le théorème suivant, relatif au polygone f_1:

Entre tous les polygones rectilignes de m *côtés, qui peuvent être*

inscrits à une courbe donnée P_1, *celui seulement dont les angles sont divisés en deux parties égales par les normales de la courbe, peut avoir un périmètre maximum ou minimum.* — En particulier on pourra s'exercer sur le problème suivant: P_1 *étant une ellipse donnée, trouver le polygone* f_1, *dont le périmètre est un maximum?*

68. Le maximum ou le minimum d'aire d'un polygone rectiligne p inscrit au polygone curviligne P_1 est assujéti à la condition suivante:

Pour que l'aire d'un polygone rectiligne p *de* m *côtés, qui est inscrit à un polygone donné curviligne de* m *côtés (ou à une seule courbe)* P_1, *soit un maximum ou un minimum, il faut que la tangente, en chacun des sommets, soit parallèle à la diagonale qui joint les angles voisins.*

Il y a un théorème analogue pour les mêmes figures, tracées sur la sphère.

On sait que la courbe donnée P_1 étant une ellipse, il y a une infinité de polygones p qui satisfont à la condition, et qui ont donc tous une même aire maxima.

Remarque. On pourra s'exercer à chercher les conditions que les polygones *circonscrits* au polygone curviligne donné doivent remplir pour avoir une aire ou un périmètre maximum ou minimum.

12.

Sur le mouvement des fluides.

(Par Mr. *A. F. Svanberg* à Stockholm.)

(Présenté à l'Académie des sciences de Stockholm 13 Nov. 1839.)

---

1. Je vais considérer dans ce mémoire le cas du mouvement des fluides, où tout est symétrique autour d'un axe donné quelconque. En effet il est aisé de prévoir, que la considération de ce cas devra simplifier les équations, d'où dépendent les lois du mouvement en général; et puisque de plus on le rencontre très souvent dans la nature, il parait pour celà même mériter l'attention particulière des géomètres. Quand par exemple un liquide s'écoule par une orifice circulaire pratiquée au milieu du fond d'un vase, dont la paroi est une surface quelconque de révolution avec un axe vertical, et qu'à l'état initial tout a été symétrique autour de cet axe, il devra aussi continuer de l'être pendant toute la durée de mouvement. Dans les tournans d'eau et dans les tourbillons la nature en fournit aussi d'exemples. Si pour les inconnues de la question on choisit outre la pression et la densité, qui pour les fluides élastiques est variable, 1ment la vitesse d'une molecule parallèlement à l'axe, 2ment la vitesse, avec laquelle elle s'approche ou s'éloigne de l'axe, 3ment sa vitesse de rotation autour de l'axe, l'analyse nous donnera une loi bien rémarquable, quant à cette dernière, dont voici l'énoncé: *si l'on suit une molecule quelconque dans la courbe, qu'elle décrit pendant son mouvement, sa vitesse de rotation sera toujours en raison inverse des carrés de ses distances à l'axe.*

Je suppose connues les suivantes formules fondamentales pour le mouvement des fluides:

$$1.\quad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}=X,$$

$$2.\quad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dy}+\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}=Y,$$

$$3.\quad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dz}+\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}=Z,$$

$$4.\quad \frac{d\varrho}{dt}+\frac{d(\varrho u)}{dx}+\frac{d(\varrho v)}{dy}+\frac{d(\varrho w)}{dz}=0,$$

$$16. \quad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dr} + \frac{d\mu}{dt} + \mu\frac{d\mu}{dr} + w\frac{d\mu}{dz} - \gamma^2 r = Y\sin\theta + X\cos\theta.$$

Si l'on multiplie l'équation (14) par $\sin\theta$ et (15) par $\cos\theta$, on aura en soustrayant la première de la seconde

$$17. \quad r\frac{d\gamma}{dt} + r\mu\frac{d\gamma}{dr} + rw\frac{d\gamma}{dz} + 2\mu\gamma = Y\cos\theta - X\sin\theta.$$

Supposons maintenant, que les seules forces, qui agissent sur chaque molecule, soient des attractions ou répulsions vers des centres fixes ou mobiles, mais dont la résultante, à cause de la symétrie supposée autour de l'axe des z, doit avoir une direction qui passe par cet axe. Alors on aura

$$X : Y = x : y; \quad \text{d'où} \quad Yx - Xy = 0,$$

ou bien en substituant les valeurs de x et y données par les formules (6)

$$18. \quad Y\cos\theta - X\sin\theta = 0.$$

Si l'on fait

$$Y\sin\theta + X\cos\theta = R,$$

on trouvera en carrant

$$Y^2\sin\theta^2 + 2YX\sin\theta\cos\theta + X^2\cos\theta^2 = R^2;$$

mais en vertu de (18) on a l'équation

$$Y^2\cos\theta^2 - 2YX\sin\theta\cos\theta + X^2\sin\theta^2 = 0,$$

laquelle ajoutée à la précédante donne

$$Y^2 + X^2 = R^2; \quad \text{d'où} \quad R = \surd(Y^2 + X^2).$$

Cette expression de R fait voir, qu'après la substitution des valeurs de x et y données par les formules (6) on obtiendra pour R une expression indépendante de θ. Les équations (16) et (17) deviennent par conséquent

$$19. \quad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dr} + \frac{d\mu}{dt} + \mu\frac{d\mu}{dr} + w\frac{d\mu}{dz} - \gamma^2 r = R,$$

$$20. \quad \frac{d\gamma}{dt} + \mu\frac{d\gamma}{dr} + w\frac{d\gamma}{dz} + \frac{2\mu}{r}\gamma = 0.$$

Les équations (3) et (4) donnent

$$21. \quad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dz} + \frac{dw}{dt} + \mu\frac{dw}{dr} + w\frac{dw}{dz} = Z,$$

$$22. \quad \frac{d\varrho}{dt} + \frac{d(\varrho\mu)}{dr} + \frac{\varrho\mu}{r} + \frac{d(\varrho w)}{dz} = 0,$$

dont la dernière peut aussi se mettre sous la forme suivante:

$$23. \quad \frac{d\varrho}{dt} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d(\varrho r\mu)}{dr} + \frac{d(\varrho w)}{dz} = 0.$$

3. Le problème du mouvement que nous avons considéré, se trouve donc réduit à la solution des quatre équations données dans le numero précédent. r, z et t y entrent comme variables indépendantes, c'est-à-dire, ils n'appartiennent pas exclusivement à une même molécule de la masse fluide. Si au contraire on veut suivre une molécule quelconque dans la trajectoire qu'elle décrit pendant son mouvement, il faut considérer r et z comme fonctions de t. Désignons dans cette dernière supposition par $\frac{d.\gamma}{dt}$ le coëfficient différential de γ par rapport à t; nous aurons

$$\frac{d.\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{d\gamma}{dz}\cdot\frac{dz}{dt},$$

ou, ce qui est le même,

$$\frac{d.\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + \mu\frac{d\gamma}{dr} + w\frac{d\gamma}{dz}.$$

L'equation (20) pourra donc s'écrire ainsi:

$$\frac{d.\gamma}{dt} + \frac{2\gamma}{r}\ \frac{dr}{dt} = 0,$$

et cela multiplié par $r^2 dt$ donne

$$r^2 d.\gamma + 2\gamma r\, dr = 0,$$

dont l'intégrale est

$$r^2\gamma = a,$$

d'où enfin

$$24.\quad \gamma = \frac{a}{r^2}.$$

La constante a peut en général varier d'une molécule à l'autre; mais pour chaque molécule séparément l'équation (24) donne la loi suivante, fort remarquable, savoir, que *la vitesse de rotation la molécule dans divers points de sa trajectoire sera toujours en raison inverse des carrés des distances à l'axe du mouvement.*

De l'équation (24) suit, que si les molécules pendant leur mouvement sont forcées de s'approcher de l'axe, leur vitesse de rotation ira toujours en croissant; ce résultat est en effet confirmé par l'expérience dans les tournans d'eau et dans les tourbillons. Si à l'état initial a a été $= 0$ pour toutes les molécules, alors, et dans ce cas seulement, γ sera constamment nul pendant toute la durée du mouvement.

4. En général, si à l'état initial on a communiqué à la masse fluide un mouvement de rotation tel, que a soit constant pour toutes les molécules,

il est évident que l'équation (24) devra subsister même en régardant r, z et t comme variables indépendantes. Nous supposerons celà, et pour abréger nous ferons

$$25. \quad \int \frac{dp}{\varrho} = P.$$

De plus puisque nous avons supposé, que R et Z proviennent seulement des attractions ou répulsions vers des centres fixes ou mobiles, situés sur l'axe même des z, il faut qu'on ait

$$26. \quad R\,dr + Z\,dz = dS;$$

d'où

$$R = \frac{dS}{dr}, \qquad Z = \frac{dS}{dz},$$

S étant en général une fonction de r, z et t, mais qui dans l'équation (26) est différentié seulement par rapport à r et z. Les équations (19) et (21) peuvent donc s'écrire ainsi:

$$27. \quad \frac{dP}{dr} + \frac{d\mu}{dt} + \mu\frac{d\mu}{dr} + w\frac{d\mu}{dz} - \frac{\alpha^2}{r^3} = \frac{dS}{dr},$$

$$28. \quad \frac{dP}{dz} + \frac{dw}{dt} + \mu\frac{d\mu}{dr} + w\frac{d\mu}{dz} = \frac{dS}{dz}.$$

Pour éliminer P, différentions l'équation (27) par rapport à z et (28) par rapport à r; puis rétranchons la seconde de la première. L'équation, qui en résultera, peut se mettre sous la forme suivante:

$$\frac{d\left(\frac{d\mu}{dz} - \frac{dw}{dr}\right)}{dt} + \mu\frac{d\left(\frac{d\mu}{dz} - \frac{dw}{dr}\right)}{dr} + w\frac{d\left(\frac{d\mu}{dz} - \frac{dw}{dr}\right)}{dz}$$
$$+ \left(\frac{d\mu}{dr} + \frac{dw}{dz}\right)\left(\frac{d\mu}{dz} - \frac{dw}{dr}\right) = 0.$$

Faisons pour abréger

$$\frac{d\mu}{dz} - \frac{dw}{dr} = \Theta;$$

l'équation précédente donnera

$$29. \quad \frac{d\Theta}{dt} + \mu\frac{d\Theta}{dr} + w\frac{d\Theta}{dz} + \left(\frac{d\mu}{dr} + \frac{dw}{dz}\right)\Theta = 0.$$

Si nous désignons, comme nous l'avons fait précédemment, par $\frac{d.U}{dt}$ le coëfficient différentiel d'une fonction quelconque U par rapport à t, en y regardant r et z aussi comme fonctions de t, nous aurons en général

$$\frac{dU}{dt} + \mu\frac{dU}{dr} + w\frac{dU}{dz} = \frac{d.U}{dt},$$

et par là l'équation (29) se changera en

$$30.\quad \frac{d.\Theta}{dt}+\left(\frac{d\mu}{dr}+\frac{dw}{dz}\right)\Theta=0.$$

L'équation (22) donne

$$\frac{d\varrho}{dt}+\mu\frac{d\varrho}{dr}+w\frac{d\varrho}{dz}+\varrho\left(\frac{d\mu}{dr}+\frac{dw}{dz}+\frac{\mu}{r}\right)=0,$$

ou bien

$$\frac{d.\varrho}{dt}+\varrho\left(\frac{d\mu}{dr}+\frac{dw}{dz}+\frac{dr}{rdt}\right)=0.$$

Delà on tire

$$\frac{d\mu}{dr}+\frac{dw}{dz}=-\frac{d.\varrho}{\varrho dt}-\frac{dr}{rdt},$$

par où l'équation (30) deviendra

$$\frac{d.\Theta}{dt}=\Theta\left(\frac{d.\varrho}{\varrho dt}+\frac{dr}{rdt}\right),$$

laquelle multipliée par $\frac{dt}{\Theta}$ devient intégrable et donne

$$\log\Theta=\log b\varrho r,$$

d'où nous obtenons enfin, en remettant pour Θ sa valeur,

$$31.\quad \frac{d\mu}{dz}-\frac{dw}{dr}=b\varrho r.$$

La constante b est indépendante de la situation continuellement changeante de chaque molecule, mais qui généralement n'est pas la même pour toutes, c'est-à-dire qu'elle peut varier d'un point de l'espace à l'autre. Sa valeur se déterminera d'après la valeur connue de Θ à une époque quelconque donnée. Si à cette époque la valeur de Θ pour tous les divers points de la masse fluide est telle, qu'on obtient b constant pour toutes les molecules, il s'ensuit que l'équation (31) devra subsister pendant toute la durée du mouvement, même en regardant r, z et t comme des variables indépendantes. Si p. ex. à une époque quelconque on avoit

$$32.\quad \frac{d\mu}{dz}-\frac{dw}{dr}=0$$

pour tous les points du fluide, il s'ensuivroit $b=0$ dans l'équation (31), et par conséquent l'égalité (32) devroit subsister au bout d'un temps quelconque pour tous les points du fluide. Mais l'équation (32) est celle de condition, pour que $\mu dr+wdz$ soit la différentielle complète d'une fonction quelconque Φ par rapport à r et z. Si donc on fait

$$33.\quad \mu dr+wdz=d\Phi,$$

ce qui donne

$$\mu = \frac{d\varphi}{dr}, \qquad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

et qu'on substitue ces valeurs dans les équations (27) et (28), il viendra

$$\frac{dP}{dr} + \frac{d^2\varphi}{drdt} + \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{drdz} - \frac{a^2}{r^3} = \frac{dS}{dr},$$

$$\frac{dP}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dzdt} + \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{d^2\varphi}{drdz} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{dS}{dz}.$$

Ces équations donnent, si on les ajoute après avoir multiplié la première par dr et la seconde par dz,

$$dP + d.\frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}d.\left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] - a^2\frac{dr}{r^3} = dS,$$

et l'intégration de cette équation donne

$$34. \quad P + \frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] - \frac{a^2}{2r^2} = S.$$

On pourroit y ajouter une fonction arbitraire de t, puisque dans l'intégration cette variable est régardée comme constante; mais comme cette fonction peut être censée renfermée dans la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$, on peut, sans déroger à la généralité de l'équation précédente, se dispenser de l'y ajouter. L'équation (22) donne

$$35. \quad \frac{d\varrho}{dt} + \frac{d\left(\varrho\frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr} + \frac{d\left(\varrho\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz} + \frac{\varrho}{r}\cdot\frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

5. Supposons qu'il s'agit d'un fluide incompressible et que la pésanteur soit la seule force qui agit sur ses molécules. Alors ϱ est constant et on peut le supposer égal à l'unité; l'équation (25) donne par conséquent $P = p$, et si l'on prend les z positives dans une direction contraire à celle de la pésanteur, on aura

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g,$$

g désignant la vitesse d'un corps pésant après une seconde de chûte libre. L'équation (26) donne

$$S = -gz.$$

Supposons que le mouvement ait commencé du repos, nous aurons $a = 0$ pour toutes les molécules, d'où l'on conclut en général $\gamma = 0$. Puisque de plus à ce moment $\mu = 0$ et $w = 0$, $\mu dr + w dz$ est alors une différentielle complète, et par conséquent il continuera de l'être pendant toute la

durée du mouvement. Les équations (34) et (35) donnent pour ce cas

$$36.\quad p+\frac{d\varphi}{dt}+\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right\} = -gz,$$

$$37.\quad \frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\varphi}{dr}+\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

De ces deux équations dépendent les lois de l'écoulement d'un liquide par une orifice circulaire, pratiquée au milieu du fond d'un vase, dont la paroi soit une surface quelconque de revolution autour d'un axe vertical, le mouvement ayant commencé du repos, de manière qu'il n'y ait pas de mouvement tournoyant.

6. Puisque dans le cas du mouvement, que nous venons de considérer, r et z décroissent tandis que le temps croit, il est évident que μ et w devront être négatives. Désignons par r' la valeur de r pour l'orifice, et par R pour la paroi; R sera en général une fonction de z. Or soit que la surface du niveau s'abaisse, ou qu'elle ne varie pas, si l'on appelle q le volume du liquide sorti du vase au bout du temps t, sa différentielle sera égale au volume du liquide, qui traverse un plan quelconque perpendiculaire à l'axe pendant l'instant dt. Si donc dans un tel plan nous considérons un anneau circulaire compris entre les deux rayons r et $r+dr$, son aire sera égale à $2\pi r dr$, laquelle multipliée par $-wdt$ donne le volume du liquide, qui pendant l'instant dt l'a traversé. En prenant la somme de ces produits depuis $r=0$ jusqu'à $r=R$, il vient

$$38.\quad dq = -2\pi dt\int_0^R w.r dr.$$

Cette équation devant subsister, quel que soit z, il faut que la différence partielle du second membre par rapport à cette variable soit égale à zéro; ce qui donne

$$\frac{d.\int_0^R w.r dr}{dz} = 0,$$

ou bien, si l'on se rappelle que R est lui-même une fonction de z,

$$\int_0^R \frac{dw}{dz}.r dr + R w_R \frac{dR}{dz} = 0,$$

w_R désignant la valeur de w pour $r=R$. Mais l'équation (23) donne, en faisant $\varrho=1$,

$$39.\quad \frac{d(r\mu)}{dr}+r\frac{dw}{dz} = 0:$$

l'équation précédante pourra donc s'écrire comme suit:

$$R w_R \frac{dR}{dz} - \int_0^R \frac{d(r\mu)}{dr} dr = 0.$$

L'intégration étant effectuée entre les limites données, on obtient après avoir divisé par R,

$$40. \quad w_R \frac{dR}{dz} - \mu_R = 0;$$

μ_R etant la valeur de μ à la limite $r = R$. L'équation (40) est en effet la condition necessaire pour que les mêmes particules du liquide soient toujours contiguës à la paroi. On a coutume de donner cette équation comme le résultat d'une supposition particulière; mais nous venons de voir, qu'elle est une conséquence nécessaire de la continuité de la masse liquide.

7. Soit $z = 0$ l'équation du fond du vase et $z = z_1$ l'équation de la surface supérieure: z_1 sera en général fonction de r et t. D'abord il est évident, que les molecules voisines au fond du vase ne pourront avoir qu'un mouvement horizontal, et par conséquent qu'on aura $w = 0$ pour $z = 0$ et $r > r'$.

Imaginons maintenant un cylindre circulaire, dont le rayon r soit $> r'$ et dont l'axe coïncide avec celui du mouvement. Si l'on appelle A la différence des volumes du liquide, qui aux temps t et $t + dt$ sont contenus dans ce cylindre, et B le volume du liquide, qui dans le temps dt a traversé sa surface, on aura, quel que soit d'ailleurs r,

$$dq = A + B.$$

Or l'abaissement du niveau dans le temps dt étant égal à $-\frac{dz_1}{dt} dt$, on trouvera de la même manière que dans le numero précédent,

$$A = -2\pi dt \int_0^r \frac{dz_1}{dt} r dr.$$

Pour obtenir B il faut considérer un élément annullaire dont le rayon soit r et la hauteur dz; l'aire de cet élément sera égale à $2\pi r dz$. Si on la multiplie par $-\mu dt$, et qu'on prenne la somme de tous ces produits depuis $z = 0$ jusqu'à $z = z_1$, il viendra

$$B = -2\pi dt \int_0^{z_1} \mu r dz,$$

d'où l'on obtient enfin

$$41. \quad dq = -2\pi dt \left(\int_0^r \frac{dz_1}{dt} r dr + \int_0^{z_1} \mu r dz \right).$$

Puisque dq doit rester le même quel que soit r, pourvu qu'il soit $> r'$,

il faut que la différence partielle du second membre de l'équation précedente par rapport à r soit égale à zéro. Celà donne

$$r\frac{dz_1}{dt}+r\mu_{z_1}\frac{dz_1}{dr}+\int_0^{z_1}\frac{d(\mu r)}{dr}dz = 0,$$

ou bien, si l'on substitue la valeur de $\frac{d(\mu r)}{dr}$ tirée de l'équation (39), et qu'on divise ensuite par r,

$$42.\quad \frac{dz_1}{dt}+\mu_{z_1}\frac{dz_1}{dr}-w_{z_1} = 0,$$

μ_{z_1} et w_{z_1} désignant les valeurs de μ et w correspondantes à $z=z_1$. L'équation (42) est en effet celle qu'on obtient, quand on veut exprimer la condition que les molecules de la surface supérieure, dont l'équation est $z-z_1=0$, restent toujours dans cette surface, pendant qu'elle varie. Nous voyons, que cette supposition est essentiellement liée à la continuité de la masse liquide, et qu'elle en est une conséquence absolument nécessaire. Il faut cependant observer, que l'équation (41) n'ayant lieu que pour $r>r'$, l'équation (42) ne subsistera pas non plus, que hors de cette limite de r.

13.

Probabilité des résultats moyens tirés d'observations répetées.

(Par Mr. *Lobatschewsky*, recteur de l'université de Cazan.)

Je me sers de l'expression $r^{\infty n}$ pour représenter le produit des n facteurs

$$r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1),$$

le nombre n étant entier et positif, quel que soit au reste l'autre nombre r. Posons de plus que $r^{\infty n}=1$ pour $n=0$ et $r^{\infty n}=0$ toutes les fois que l'exposant n dévient négativ. On a de cette manière

$$1.\qquad \frac{r^{\infty n}}{n^{\infty n}}=\frac{(r-1)^{\infty n}}{n^{\infty n}}+\frac{(r-1)^{\infty n-1}}{(n-1)^{\infty n-1}}.$$

Je considère à présent la fonction algébrique

$$2.\qquad C_r(m)=\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{(r-1)^{\infty r-1}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\infty r-1},$$

où le signe Σ s'étend à toutes les valeurs du nombre entier positif λ depuis $\lambda=0$, tant que

$$\lambda\leqq\frac{ra-m+1}{2a+1},$$

les autres nombres r, a étant entiers positifs, m est aussi un entier positif ou négatif. Par exemple en mettant $r=0$, 1, 2, etc. et en regardant m comme positif, on trouve

$$3.\qquad \begin{cases} C_0(m)=0,\\ C_1(m)=1,\\ C_1(-m)=1,\\ C_2(m)=2a-m+1,\\ C_2(-m)=2a-m+1.\end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) on trouve

$$\begin{aligned} C_r(m+1)&=C_r(m)+\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}(r-1)^{\infty\lambda}}{(r-2)^{\infty r-2}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{r\,r-2}\\ &=C_r(m)+\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}(r-1)^{\infty\lambda}}{(r-2)^{\infty r-2}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\infty r-2}\\ &\qquad+\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}(r-1)^{\infty\lambda-1}}{(r-2)^{\infty r-2}(\lambda-1)^{\infty\lambda-1}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda)]^{\infty r-2}\\ &=C_r(m)+C_{r-1}(a+m)-\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}(r-1)^{\infty\lambda}}{(r-2)^{\infty r-2}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+m-2a+r-2-\lambda]^{\infty r-2},\end{aligned}$$

ou enfin

$$4.\quad C_r(m+1) = C_r(m) + C_{r-1}(a+m+1) - C_{r-1}(m-a).$$

La fonction $C_r(m)$ jouit encore de la propriété de ne pas changer de valeur quand on y met $-m$ au lieu de $+m$, de sorte que

$$5.\quad C_r(m) = C_r(-m).$$

Les équations (3) la vérifient déjà pour $r=0, 1, 2$. Supposons que cela soit vrai pour tous les nombres r depuis $r=0$ jusqu'à un nombre r donné. En mettant $r+1$ au lieu de r, et $m+1$ ou $-m$ au lieu de m dans l'équation (4), nous aurons

$$\begin{aligned} C_{r+1}(m+1) &= C_{r+1}(m) \qquad + C_r(a+m+1) - C_r(m-a), \\ C_{r+1}(-m) &= C_{n+1}(-m-1) + C_r(a-m) \quad - C_r(-m-a-1), \\ &= C_{r+1}(-m-1) + C_r(m-a) \quad - C_r(m+a+1); \end{aligned}$$

parconséquent

$$C_{r+1}(m+1) = C_{r+1}(-m-1) + C_{r+1}(m) \qquad - C_{r+1}(-m).$$

En y mettant de suite $m=0, 1, 2$ etc., on en conclut que la proposition est vraie pour l'indice $(r+1)$ et pour tous les nombres entiers m en général.

Lorsque $r=2$, $m=2a$, on a

$$6.\quad C_r(ra) = 1;$$

ce qui est aussi vrai pour tous les nombres r; comme le prouve l'expression (2) où λ dans ce cas ne peut excéder zéro.

Pour $r=2$, $m=2a+\alpha$ et $\alpha>0$, la fonction $C_r(m)$ dévient

$$7.\quad C_r(ra+\alpha) = 0,$$

ce qui est aussi vrai pour tous les nombres entiers positifs r, comme on peut le prouver en admettant d'abord l'équation (7) pour tous les indices inférieurs à r.

En effet l'équation (4) nous donne

$$8.\quad C_r(ra+\alpha) =$$

$$C_r(ra+\alpha-1) + C_{r-1}(ra+a-\alpha) - C_{r-1}(ra-a+\alpha-1).$$

Mais comme il a été déjà prouvé par l'équation (6) que

$$C_r(ra) = 1, \qquad C_{r-1}(ra-a) = 1,$$

et comme nous venons de supposer de plus

$$C_{r-1}(ra+\alpha) = 0,$$

l'équation (8) nous donne d'abord pour $\alpha=1$,

$$C_r(ra+1) = 0.$$

Ensuite pour $\alpha > 1$, si l'on suppose

$$C_{r-1}(ra + a + \alpha) = 0, \qquad C_{r-1}(ra - a + \alpha - 1) = 0,$$

on tire de la même équation (8):

$$C_r(ra + \alpha) = C_r(ra + \alpha - 1).$$

En commencant par mettre ici $\alpha = 1$, puis $\alpha = 2$, 3 etc., on vérifiera l'équation (7) pour tous les nombres α.

Déterminons à présent la probabilité des erreurs dans les résultats moyens. Supposons que dans une observation toutes es erreurs soient des nombres entiers également possibles depuis $+a$ jusqu'a $-a$. En combinant les observations dont le nombre est r, il y aura dans la somme une erreur m qui ne peut dépasser les limites $+ra$, $-ra$. Ce nombre de combinaisons est la même fonction de r et de m, que nous avons désignée plus haut par $C_r(m)$. En effet cette expression satisfait déjà à la condition de dévenir zéro chaque fois que m excéde ra; puis elle est égale à l'unité pour $m = ra$, et enfin elle jouit de la propriété de non pas changer de valeur, quand on y met $-m$ au lieu de $+m$ (voir les équat. (5), (6), (7)). Il ne reste donc à considerer que le cas des m positifs et moindres que ra.

Si $r = 1$, le nombre des combinaisons dévient l'unité, ce qui est aussi la valeur de $C_r(m)$, comme le fait voir une des équation (3). Pour tous les autres nombres r il faut et même il suffit que la fonction $C_{r+1}(m)$ soit la somme de toutes les valeurs du produit

$$C_r(p) \cdot C_1(m - p)$$

depuis $p = m - a$ jusqu'à $p = m + a$. Mais comme $C_1(m - p) = 1$, il faut que

$$C_{r+1}(m) = \Sigma C_1(p)$$

entre les mêmes limites des p, ce qui est aussi vrai et prouvé en y mettant l'expression (2) pour $C_r(p)$. On a de cette manière

$$C_{r+1}(m) = \Sigma\Sigma \frac{(-1)^\lambda r^{\infty\lambda}}{(r-1)^{\infty r-1} \lambda^{\infty\lambda}} [(r - 2\lambda)a + p + r - 1 - \lambda]^{\infty r-1},$$

la double sommation s'étendant à toutes les valeurs de p et de λ, depuis $p = m - a$ jusqu'à $p = m + a$, et depuis $\lambda = 0$, tant que

$$\lambda \leqq \frac{ra + p + 1}{2a + 1}.$$

La sommation par rapport à p étant effectuée, nous aurons

$$C_{r+1}(m) = \Sigma \frac{(-1)^\lambda r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r} \lambda^{\infty\lambda}} [(r - 2\lambda)a + p + r - \lambda]^{\infty r} + A,$$

où il faut mettre $p = m + a$ et prendre la constante A de manière que $C_{r+1}(m)$ dévienne zéro pour $p = m - a - 1$. Parconséquent

$$A = -\Sigma \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r} \lambda^{\infty\lambda}} [(r-2\lambda)a + m - a - 1 + r - \lambda]^{\infty r}$$

depuis $\lambda = 0$, tant que

$$\lambda \leqq \frac{ra + m - a}{2a+1},$$

où après y avoir remplacé λ par $\lambda - 1$,

$$A = \Sigma \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda-1}}{r^{\infty r}(\lambda-1)^{\infty\lambda-1}} [(r+1-2\lambda)a + m + r]^{\infty r}$$

depuis $\lambda = 0$, tant que

$$\lambda \leqq \frac{(r+1)a + m + 1}{2a+1}.$$

La valeur de $C_{r+1}(m)$ est donc

$$C_{r+1}(m) = \Sigma \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r} \lambda^{\infty\lambda}} [(r+1-2\lambda)a + m + r]^{\infty r}$$
$$+ \Sigma \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda-1}}{r^{\infty r}(\lambda-1)^{\infty\lambda-1}} [(r+1-2\lambda)a + m + r]^{\infty r},$$

les limites des λ dans les deux sommes étant les mêmes, c'est-à-dire $\lambda = 0$ et

$$\lambda \leqq \frac{(r+1)a + m + 1}{2a+1}.$$

Ces deux sommes étant réunies en une seule, déviennent

$$\Sigma \frac{(-1)^{\lambda} (r+1)^{\infty\lambda}}{r^{\infty r} \lambda^{\infty\lambda}} [(r+1-2\lambda)a + m + r]^{\infty r},$$

ce qui est en effet l'expression de $C_{r+1}(m)$, comme nous l'avons donnée plus haut (équat. (2)) et dans laquelle, comme il a été prouvé, il est permis de mettre $-m$ au lieu de $+m$, et de poser ainsi la valeur du nombre des combinaisons qui peuvent produire l'erreur m,

$$C_r(m) = \Sigma \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{(r-1)^{\infty r-1} \lambda^{\infty\lambda}} [(r-2\lambda)a - m + r - \lambda - 1]^{\infty r-1},$$

la sommation s'étendant depuis $\lambda = 0$, tant que

$$\lambda \leqq \frac{ra - m + 1}{2a+1}.$$

En réunissant toutes les valeurs de $C_r(m)$ depuis $m = 1$ jusqu'à un nombre donné m, on trouve

$$\sum_{+1}^{+m} C_r(m) = A - \Sigma \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r} \lambda^{\infty\lambda}} [(r-2\lambda)a - m + r - \lambda]^{\infty r}.$$

La constante A est déterminée par la condition que la première

partie de cette équation s'évanouisse avec $m=0$. Parconséquent

$$9. \quad A=\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+r-\lambda]^{\infty r}$$

depuis $\lambda=0$, tant que

$$\lambda\leqq\frac{ra+1}{2a+1}.$$

Après avoir multiplié par 2 l'équation (9), si l'on y ajoute $C_r(0)$, on aura le nombre total de combinaisons pour que l'erreur m reste entre les limites $+m$, $-m$. Ce nombre sera

$$10. \quad \sum_{-m}^{+m}C_r(m)=$$

$$2\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r}\lambda^{\infty\lambda}}\{[(r-2\lambda)a+r-\lambda]^{\infty r}-[(r-2\lambda)a-m+r-\lambda]^{\infty r}\}$$
$$+\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{(r-1)^{\infty r-1}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+r-\lambda-1]^{\infty r-1}$$

où λ sous le signe Σ va en croissant depuis $\lambda=0$ jusqu'à ce que les produits ne contiennent plus des facteurs positifs.

Il est clair que le nombre des combinaisons qui produisent toutes les erreurs possibles, doit être $(2a+1)^r$. Il faut donc que

$$11. \quad (2a+1)^r=$$
$$\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r}\lambda^{\infty\lambda}}\{2[(r-2\lambda)a+r-\lambda]^{\infty r}+r[(r-2\lambda)a+r-\lambda-1]^{\infty r-1}\}.$$

En désignant par $P_r(m)$ la probabilité que l'erreur m du résultat moyen des r observations soit entre les limites $+m$, $-m$, on a évidemment

$$P_r(m)=\frac{1}{(2a+1)^r}\sum_{-m}^{+m}C_r(m).$$

En combinant cette équation avec les équations (10), (11), après avoir divisée ces deux dernières par $(2a+1)^r$, et en y faisant ensuite

$$\frac{m}{ra}=x, \qquad a=\infty,$$

on a

$$P_r(x)=\frac{2}{r^{\infty r}}\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{\lambda^{\infty\lambda}}[(\tfrac{1}{2}r-\lambda)^r-(\tfrac{1}{2}r-\tfrac{1}{2}rx-\lambda)^r],$$
$$r^{\infty r}=2\Sigma(-1)^{\lambda}\frac{r^{\infty\lambda}}{\lambda^{\infty\lambda}}(\tfrac{1}{2}r-\lambda)^r,$$

où $P_r(x)$ représente la probabilité que l'erreur du résultat moyen tiré des r odservations ne sort pas des limites $+x$, $-x$, lorsque la plus grande erreur de chaque observation n'excede pas $+1$ et -1. La réunion des deux dernières équations donne pour cette probabilité

$$P_r(x)=1-\frac{1}{r^{\infty r}2^{r-1}}\Sigma(-1)^{\lambda}\frac{r^{\infty\lambda}}{\lambda^{\infty\lambda}}(r-rx-2\lambda)^r,$$

le signe-somme s'étendant à toutes les valeurs de λ jusqu'aux puissances des nombres négatifs.

Si l'on prend par exemple $r = 10$, on trouve

pour $x \geqq 0{,}8$

$$P_r(x) = 1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10},$$

pour $x \geqq 0{,}6$

$$P_r(x) = 1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181440},$$

pour $x \geqq 0{,}4$

$$P_r(x) = 1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181440} - \frac{(3-5x)^{10}}{40320},$$

pour $x \geqq 0{,}2$

$$P_r(x) = 1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181440} - \frac{(3-5x)^{10}}{40320} + \frac{(2-5x)^{10}}{15120},$$

pour $x < 0{,}2$

$$P_r(x) =$$

$$1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181440} - \frac{(3-5x)^{10}}{40320} + \frac{(2-5x)^{10}}{15120} - \frac{(1-5x)^{10}}{8640}.$$

Le calcul étant poussé jusqu'à la cinquième décimale, donne

Erreur.	Probabilité.
1,0	1,00000
0,9	1,00000
0,8	1,00000
0,7	0,99968
0,6	0,99944
0,5	0,99506
0,4	0,96179
0,3	0,89910
0,2	0,72220
0,1	0,41096
0,0	0,00000

Il y a donc avantage à parier 18 contre 7 que si l'observation est repétée dix fois, l'erreur de la moyenne ne surpassera pas un cinquième de la plus grande erreur qui puisse être commise dans l'observation unique.

Laplace dans sa Théorie analytique des probabilités ne s'est occupé proprement que du cas d'un nombre d'observations très grand. Par des considérations extrêmement compliquées et en se servant toujours des intégrales définies il est parvenu aux expressions qui s'accordent tout à fait avec celles que nous venons de donner ici. Le nombre de combinaisons dans lesquelles la somme des erreurs est m, tandis que celui des répétitions

est r, peut être rendu par l'intégrale définie

$$C_r(m) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\omega \cos m\omega \left(\frac{\sin(a+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right)^r.$$

En divisant cette intégrale par $(2a+1)^r$, nombre total des combinaisons, on aura

$$\frac{1}{(2a+1)^r} C_r(m) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega \cos m\omega}{(2a+1)^r}\left(\frac{\sin(a+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right)^r$$

pour la probabilité que la somme des erreurs soit m. Maintenant la probabilité qu'elle sera comprise dans les limites $+m$ et $-m$, doit être

$$P_r(m) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx \sin m\omega}{\omega(2a+1)^r}\left(\frac{\sin(a+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right)^r.$$

Si l'on y met $m = rax$, puis $a = \infty$ et qu'on y fasse $a\omega = z$, on a

$$12. \quad \frac{1}{(2a+1)^r} C_r(m) = \frac{1}{a\pi}\int_0^\infty dz \cos(rxz)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r,$$

$$13. \quad P_r(x) = \frac{2r}{\pi}\int_0^\infty\int_0^x dz\, dx \cos(rxz)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r,$$

Or nous avons trouvé pour $C_r(m)$ l'expression (2) qui dans le cas de $a = \infty$ nous conduit à la connaissance de l'intégrale dans l'équation (12.)

$$14. \quad \int_0^\infty dz \cos(rxz)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r = \frac{\pi}{2^{r-1}}\Sigma \frac{(-1)^\lambda r^{\frown\lambda}}{(r-1)^{\frown r-1}\lambda^{\frown\lambda}}(r-2\lambda \pm rx)^{r-1}.$$

Le signe qui exprime ici la somme, se rapportant à toutes les valeurs de λ jusqu'aux quantités sous l'exposant $r-1$, le nombre x peut être pris indifféremment avec l'un ou l'autre signe devant lui. *Laplace* assigne aussi cette valeur à l'intégrale définie, mais il y arrive par une voie peu directe.

L'expression que nous avons trouvée pour $P_r(x)$ sert à connaître aussi la double intégrale (13), d'où l'on conclut, après avoir effectué l'intégration par rapport à x, que

$$15. \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dz}{z}\sin(rxz)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r = 1 - \frac{1}{r^{\frown r}2^{r-1}}\Sigma(-1)^\lambda \frac{r^{\frown\lambda}}{\lambda^{\frown\lambda}}(r-rx-2\lambda)^r,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de λ depuis $\lambda = 0$ jusqu'aux puissances des nombres négatifs, le nombre x étant positif, moindre ou égal à l'unité, et r un entier positif. Les équations (14), (15) dévant être vraies aussi pour $r = 1$, toutes les deux s'accordent à donner l'intégrale connue

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x = \tfrac{1}{2}\pi$$

et en fournissent ainsi une nouvelle démonstration.

14.

Note über die analytischen Beweise elementar-geometrischer Sätze.

(Von Herrn Dr. *Reuschle*, Professor am Gymnasio zu Stuttgart.)

Diese Beweise, deren Urheber, soviel mir bekannt, *Legendre* ist und die *Littrow* seinen Elementen der Algebra und Geometrie selbst einverleibt hat, sind hin und wieder in Mifscredit gekommen: theils wegen offenbar irriger Anwendungen, wie bei den Beweisen der Sätze von der Winkelsumme im Dreieck (*Littrow* pag. 191), von der Rectification und Quadratur des Kreises (*Littrow* pag. 265): theils wegen nicht ganz befriedigender Ausführung in Fällen, wo sie in der That Stich halten, wie bei den Beweisen der Sätze vom Flächen-Inhalt des Rechtecks, vom Volum des rechtwinkligen Parallelepipeds (*Littrow* pag. 220, 353); und zwar hat das Unbefriedigende hauptsächlich nur darin seinen Grund, dafs die Analysis nicht *genugsam* in Anwendung gebracht worden ist. Dies will ich hier an einigen Beispielen zu zeigen suchen und schicke ein denselben gemeinsames Beweismoment in folgendem *analytischen Hülfssatz* voran:

Wenn eine Function $y = fx$ von x durch die Functionalgleichung

$$f(x+\Delta x) = fx + f(\Delta x)$$

definirt wird, wofür man auch schreiben kann

$$\Delta(fx) = f(\Delta x),$$

so ist diese Function, wenn C eine Constante bedeutet,

$$y = Cx,$$

d. h. es wird durch jene Functionalgleichung die Proportionalität der Gröfsen y und x ausgesagt.

Denn entwickelt man die beiden Theile der Gleichung nach Δx, so erhält man

$$\frac{dfx}{dx}\Delta x + \frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{2} + \dots = f0 + \left(\frac{dfx}{dr}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{d^2fx}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{2} + \dots,$$

folglich, durch Vergleichung der Coëfficienten,

$$f0 = 0,$$

$$\frac{dfx}{dx} = \left(\frac{dfx}{dx}\right)_0 = C,$$

wo C eine Constante ist, folglich

$$\frac{d^2fx}{dx^2} = \left(\frac{d^2fx}{dx^2}\right)_0 = 0,$$

und desgleichen alle folgenden. Es ist mithin

$$f(\Delta x) = C\Delta x$$

und desgleichen $fx = Cx$.

Dieses Resultat hat sich ohne Integration aus der Entwicklung ergeben. Man kann aber auch die Gleichung

$$\frac{dfx}{dx} = C$$

als Differenzialgleichung integriren und diese selbst, ohne Entwicklung, durch Differenziation aus der ursprünglichen Functionalgleichung ableiten. Dies giebt

$$\frac{df(x+\Delta x)}{dx} = \frac{dfx}{dx},$$

d. h. die Ableitung $\frac{dfx}{dx}$ oder $f'x$ ist eine solche Function von x, die sich nicht ändert, wenn man der Veränderlichen x ein beliebiges Increment Δx giebt, mithin eine Constante. Die Integration giebt alsdann

$$fx = Cx + C':$$

ein mit der Integrationsconstante C' behaftetes Resultat, und dessen Substitution in die ursprüngliche Gleichung zeigt, daſs $C' = 0$ zu nehmen ist. Eine solche Functionalgleichung enthält also zugleich die Bestimmung der Constante, welche durch Integration der ihr im übrigen gleichgeltenden Differenzialgleichung eingeführt wird.

Wo man nun in der Geometrie obige Functionalgleichung der unmittelbaren Anschauung gemäſs aufstellen kann, ist durch diesen Satz die Proportionalität erwiesen.

Beispiele.

1) **Fläche des Rechtecks.** Es seien x, y die Seiten, S die Fläche eines Rechtecks, so ist offenbar

$$S = F(x, y):$$

aber auch der Anschauung gemäſs, wenn y um eine beliebige Gröſse Δy sich ändert,

$$F(x, y+\Delta y) = F(x, y) + F(x, \Delta y),$$

folglich

$$F(x, y) = yfx.$$

Eben so ist, wenn nunmehr x um Δx sich ändert,

$$yf(x+\Delta x) = y(fx+f(\Delta x)),$$

folglich

$$fx = Cx,$$

und somit

$$S = Cxy.$$

Nimmt man aber, um die Constante zu bestimmen, $x=1$, $y=1$, so ist $S=C$ das Quadrat der Längen-Einheit, mithin, wenn man dieses zur Flächen-Einheit nimmt:

$$S = xy.$$

2) Volumen des rechtwinkligen Parallelepipeds. Ganz eben so zeigt man durch dreimalige Anwendung des allgemeinen Satzes, dafs man für das Volumen V eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Seiten x, y, z sind, im Allgemeinen

$$V = Cxyz,$$

und insbesondere

$$V = xyz$$

hat, wenn man den Cubus der Längen-Einheit, den hier die Constante C bedeutet, zur Volum-Einheit nimmt.

3) Volumen irgend eines geraden prismatischen oder cylindrischen Körperstücks zwischen zwei parallelen Grundflächen. Es sei V dieses Volumen, S die Grundfläche, h die Höhe, so ist nicht nur

$$V = F(S,h),$$

sondern auch

$$F(S,h+\Delta h) = F(S,h)+F(S,\Delta h).$$

mithin

$$F(S,h) = hfS.$$

Ferner, eben so,

$$hf(S+\Delta S) = hfs+hf(\Delta S),$$

folglich

$$fS = CS,$$

und somit

$$V = CSh.$$

Die Bestimmung der Constante geschieht wiederum durch die Annahme $S=1$, $h=1$; sie ist mithin das Volumen eines prismatischen Körpers, dessen Höhe der Längen-Einheit und dessen Grundfläche der Flächen-Einheit gleich ist, also gleich dem Würfel der Längen-Einheit, wenn deren Quadrat die

Flächen-Einheit ist, und

$$V = hS,$$

wenn jener Würfel die Volum-Einheit ist.

4) **Proportionalität einer geradlinigen Länge, sowie einer ebenen Figur, mit ihrer Projection.** Es sei r ein Stück einer Geraden, x seine Projection auf eine Gerade, die mit jener den Winkel θ macht, so ist

$$x = F(r, \theta)$$

und

$$F(r + \Delta r, \theta) = F(r, \theta) + F(\Delta r, \theta),$$

folglich

$$x = r\varphi\theta.$$

Da ferner die Projection einer geradlinigen Länge auf eine Ebene, die den Winkel θ mit der Geraden macht, einerlei ist mit der Projection auf den Durchschnitt der projicirenden Ebene mit der Projections-Ebene, so gilt dasselbe Resultat auch für die Projection einer Distanz auf eine Ebene.

Es sei endlich X die Projection einer ebenen Figur R auf eine Ebene, die mit jener den Winkel θ macht, so hat man auch diesfalls

$$X = F(R, \theta)$$

und

$$F(R + \Delta R, \theta) = F(R, \theta) + F(\Delta R, \theta)$$

folglich

$$X = Rf\theta,$$

d. h. die Projection proportional der projicirten Figur durch eine Function $f\theta$ des Projectionswinkels, deren Identität mit der obigen Function φ sofort auf die bekannte Art zu erweisen ist.

Die Gleichung

$$x = r\varphi\theta$$

ist einerseits die Grundlage für die analytische Behandlung der Lehre von der Aehnlichkeit und führt so auf die bekannte Weise zum pythagoräischen Lehrsatz; andrerseits, als Definitionsgleichung der Function $\varphi\theta$, Grundlage der Goniometrie. Für $r = 1$ findet sich diese Function durch die Länge x construirt, und nennt man dieselbe den Cosinus des Winkels θ, so kann man sofort das Zeichen cos an die Stelle von φ setzen und überdies die coordinirte Function $\varphi(90 - \theta) = \sin\theta$ einführen. Es bleibt aber auch unbenommen, das Functionszeichen φ beizubehalten (auch mit Hinzunahme eines $\psi\theta$ für $\varphi(90-\theta)$) und diese Functionen einer analytischen Discussion zu unterwerfen, aus welcher sofort die Identität mit cos und sin hervor-

ginge, wenn man diese Zeichen bereits in die Analysis eingeführt hätte, sei es als Exponentialfunctionen, oder bei der Integration $\int dx.X\sqrt{(a+bx+cx^2)}$, wo X eine rationale Function von x ist. Ich beschränke mich übrigens darauf, noch die Herleitung der dem pythagoräischen Lehrsatz entsprechenden Fundamentalrelation zu erwähnen.

Es seien x, y die Projectionen eines Vectors r auf zwei durch seinen Ursprung gelegte rechtwinklige Axen, mit denen r die Winkel α und $\beta = 90 - \alpha$ macht, so ist

$$x = r\varphi\alpha, \quad y = r\varphi\beta,$$

folglich, wenn man diese Gleichungen, nach respectiver Multiplication mit $\varphi\alpha$ und $\varphi\beta$, addirt,

$$x\varphi\alpha + y\varphi\beta = r((\varphi\alpha)^2 + (\varphi\beta)^2):$$

aber auch der Anschauung gemäfs,

$$x\varphi\alpha + y\varphi\beta = r,$$

folglich

$$(\varphi\alpha)^2 + (\varphi\beta)^2 = 1,$$

und wiederum in Folge hievon, wenn man obige Gleichungen quadrirt und addirt,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Man konnte hierbei auch $\varphi\beta = \psi\alpha$ setzen und dann die Gleichung in der Gestalt

$$(\varphi\alpha)^2 + (\psi\alpha)^2 = 1$$

aufstellen. Auch konnte der Gegenstand gleich im Raume mit drei Dimensionen behandelt werden, ganz auf dieselbe Weise; denn sind x, y, z die Projectionen von r auf drei rechtwinklige Axen und α, β, γ die Winkel von r mit denselben, so ist

$$x = r\varphi\alpha, \quad y = r\varphi\beta, \quad z = r\varphi\gamma,$$

und daher einerseits, durch Combination dieser Gleichungen,

$$x\varphi\alpha + y\varphi\beta + x\varphi\gamma = r((\varphi\alpha)^2 + (\varphi\beta)^2 + (\varphi\gamma)^2),$$

andrerseits, gemäfs der Anschauung,

$$x\varphi\alpha + y\varphi\beta + z\varphi\gamma = r,$$

folglich

$$(\varphi\alpha)^2 + (\varphi\beta)^2 + (\varphi\gamma)^2 = 1$$

und

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

5) **Proportionalität der Centriwinkel, Bogen und Sectoren im Kreise.** Es sei θ der Centriwinkel, s der zugehörige Sector in einem Kreise, dessen Halbmesser r, so ist

$$s = F(\theta, r)$$

und

$$F(\theta + \varDelta\theta, r) = F(\theta, r) + F(\varDelta\theta, r),$$

folglich

$$s = \theta\chi r.$$

Eben so erhält man

$$S = F(\theta, r),$$
$$F(\theta + \varDelta\theta, r) = F(\theta, r) + (\varDelta\theta, r),$$

folglich

$$S = \theta f r;$$

und ferner

$$S = F(s, r),$$
$$F(s + \varDelta s, r) = F(s, r) + F(\varDelta s, r),$$

folglich

$$S = s\varpi r = \theta\chi r\varpi r,$$

mithin

$$fr = \chi r . \varpi r.$$

Zur Bestimmung dieser Functionen χ, ϖ des Halbmessers aber hat man sich an die gewöhnlichen Gränzbetrachtungen zu wenden, die sich bei der Rectification und Quadratur des Kreises so wenig umgehen lassen, als in der Geometrie des Krummen überhaupt. Der Umgehungsversuch bei *Littrow* (pag. 265) scheint eben so mifslungen, wie der Beweis des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck. Auch die Behandlung der Constante (pag. 260) in dem Beweise des Satzes von der Proportionalität der Centriwinkel und Bogen dürfte nicht statthaft sein, weil sie die unrichtige Gleichung

Centriwinkel = Kreisbogen

giebt. Die Behandlung der Constante (pag. 221 und 354) dürfte gleichfalls verfehlt sein.

15.

Ueber das Princip der kleinsten Wirkung.

(Principe de la moindre action.)

(Von Herrn *J. Zech*, theol. cand. zu Tübingen.)

---

1. Das Princip der kleinsten Wirkung hat zuerst *Euler* in seiner *Methodus inveniendi lineas curvas, maximi minimive proprietate gaudentes, Laus. et Genev. 1744* im zweiten Anhange *„de motu projectorum in medio non resistente per methodum maximorum ac minimorum determinando"* aufgestellt, ohne jedoch einen eigentlichen Beweis davon zu geben; was auch bei dem damaligen Zustande der Analysis nicht wohl möglich war. *Euler* begnügte sich damit, a. a. O. und in den *Mém. de l'acad. roy. de Berlin 1748, pag. 149 sqq.*, sein Princip zur Auflösung verschiedener Aufgaben aus der Mechanik zu benutzen und aus der Uebereinstimmung der gefundenen Resultate mit dem auf anderem Wege Constatirten auf die Richtigkeit desselben zu schliefsen. *Lagrange*, in der 1788 erschienenen ersten Ausgabe seiner *Mécanique analytique*, gab dem *Euler*'schen Princip den Namen des Princips der kleinsten Wirkung, nach einem dem *Euler*'schen ähnlichen, aber weniger bedeutenden und allgemeinen Princip der Mechanik, welches *Maupertuis* unter diesem Namen im Jahr 1744 der Pariser Akademie vorgelegt hatte, dehnte dasselbe, während es *Euler* nur in Beziehung auf die Bewegung eines einzelnen Körpers aufgestellt hatte, auf ein beliebiges System von Körpern aus und gab zuerst einen analytischen Beweis davon, indem er es mit Hülfe der Variationsrechnung aus den bekannten Gleichungen der Bewegung ableitete. In dieser Erweiterung ging das Princip wohl in alle neuere Lehrbücher der Mechanik über, aber mehr nur als metaphysisch merkwürdiges Resultat mathematischer Formeln, als um weitere Folgerungen daraus abzuleiten.

Der gewöhnliche Ausdruck des Princips der kleinsten Wirkung ist folgender. Wenn auf einen Körper blofs Centralkräfte wirken, überhaupt wenn $Xdx + Ydy + Zdz$, wo X, Y, Z die Composanten der auf den Körper wirkenden Kräfte parallel mit den drei Coordinaten-Axen be-

zeichnen, ein vollständiges Differential ist, so ist die von dem Körper frei beschriebene Bahn und seine Bewegung in derselben so beschaffen, dafs, wenn s den durchlaufenen Weg, v die Geschwindigkeit und t die Zeit bezeichnet, $\int ds.v = \int dt.v^2$ ein Maximum oder Minimum wird, in Beziehung auf alle Curven, welche der Körper zwischen denselben Endpuncten hätte beschreiben können. Wäre der Körper genöthigt, sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, so ist $\int ds.v$ oder $\int dt.v^2$ immer noch ein Maximum oder Minimum, aber nur in Beziehung auf alle Curven, welche der Körper zwischen denselben Endpuncten *auf der gegebenen Fläche* hätte beschreiben können. Bei der freien Bewegung eines Systems von Körpern ist, wenn dieselben nur durch ihre gegenseitigen Anziehungskräfte und durch Centralkräfte getrieben werden, überhaupt wenn $\Sigma m(Xdx+Ydy+Zdz)$ ein vollständiges Differential ist, die Summe der Producte aus der Masse jedes einzelnen Körpers in das ihm entsprechende $\int ds.v$ oder $\int dt.v^2$, d. h. die Summe der lebendigen Kräfte, ein Maximum oder ein Minimum: wiederum vorausgesetzt, dafs die Anfangs- und die Endpuncte sämmtlicher Bahnen, welche die einzelnen Körper beschreiben, als gegeben angesehen werden. *Euler, Laplace* und *Poisson* sagen ausdrücklich: ein Maximum oder Minimum unter *allen* Bahnen, welche zwischen denselben Endpuncten enthalten sind; und wenn Andere, wie *Lagrange, Pontécoulant* etc. nur überhaupt von einem Maximum oder Minimum sprechen, so rührt dies wohl nur davon her, dafs sie jede weitere Bemerkung für überflüssig hielten, und nicht davon, dafs sie anderer Meinung waren; was sie sonst gewifs ausdrücklich gesagt hätten. Der Beweis des Princips ist bei Verschiedenen verschieden; alle Modificationen desselben aber laufen darauf hinaus, dafs mit Hülfe der bekannten Formeln der Dynamik, nämlich

$$1.\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$$2.\quad v^2 = C + 2\int(Xdx + Ydy + Zdz),$$

$$3.\quad X = \frac{d^2x}{dt^2};\quad Y = \frac{d^2y}{dt^2};\quad Z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

gezeigt wird, dafs

$$\delta\int ds.v = \delta\int dt.v^2 = \frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z + \text{const.}$$

ist. Für die beiden Grenzen der Bewegung wird dann weiter geschlossen, es sei, da nach der Voraussetzung $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$ ist:

$$\delta\int ds.v = \delta\int dt.v^2 = 0$$

und folglich $\int ds.v = \int dt.v^2$ ein Maximum oder Minimum: bei der ganz freien Bewegung natürlich das letztere, weil hier die Nachbarcurven unbeschränkt sind.

II. Dafs nun aber dieses Princip der kleinsten Wirkung, wenigstens in der Allgemeinheit, in welcher es gewöhnlich ausgesprochen wird, nicht stattfinde, kann durch folgendes Beispiel gezeigt werden:

Wenn ein Körper mit einer beliebigen Geschwindigkeit in einer gegen den Horizont schiefen Richtung in die Höhe geworfen wird, so beschreibt er bei der freien Bewegung im luftleeren Raume eine Parabel. Wäre er nun aber gezwungen, mit derselben Anfangsgeschwindigkeit in derselben Richtung geworfen, eine Cycloïde, welche jene Parabel im Anfangspuncte der Bewegung und noch in einem andern Puncte berührt, zu durchlaufen, so würde aus dem Princip der kleinsten Wirkung folgen, dafs das zwischen den beiden Berührungspuncten genommene $\int ds.v$ oder $\int dt.v^2$ im letztern Fall gröfser sei, als im erstern. Ob sich dies wirklich so verhalte, ist zu untersuchen.

Die Coordinaten-Axen seien in der Vertical-Ebene, in welcher die Anfangsgeschwindigkeit und daher auch beide Bahnen liegen, so gelegt, dafs der Ursprung derselben mit dem Anfangspuncte der Bewegung zusammenfällt und die Axe der x horizontal und die der y vertical ist, und zwar letztere mit ihrer positiven Seite der Richtung der Schwere entgegenläuft. Die Anfangsgeschwindigkeit, mit welcher der Körper geworfen wird, sei $= a$; der Winkel, welchen die Richtung derselben, mithin auch die gemeinschaftliche Tangente beider Curven im Anfangspuncte, mit der Axe der x macht, $= \alpha$; die Schwere endlich $= g$: so hat man zur Bestimmung der Bewegung in der Cycloïde, aufser den Gleichungen der Cycloïde selbst, die für jede freie und unfreie, durch die Schwere hervorgebrachte Bewegung geltende Gleichung:

$$v^2 = a^2 - 2gy,$$

woraus

$$1.\quad \int ds.v = \int ds.\surd(a^2-2gy) = \int dy.\frac{ds}{dy}.\surd(a^2-2gy)$$

folgt. Ist nun die Basis der Cycloïde horizontal, also parallel mit der Axe der x, r der Halbmesser des Erzeugungskreises und ϑ der Wälzungswinkel, und werden durch den Anfangspunct der Cycloïde neue, mit den alten parallele Coordinaten-Axen gelegt, so sind, wenn die neuen Coordinaten durch x', y' bezeichnet werden, die Gleichungen der Cycloïde, auf diese neuen Axen bezogen, folgende:

$$2.\quad x' = r(\vartheta-\sin\vartheta) \quad \text{und} \quad y' = r(1-\cos\vartheta).$$

Um die Gleichungen der Cycloïde für das ursprüngliche Coordinatensystem zu finden, müssen die auf das neue System bezogenen Coordinaten (x') und (y') des Anfangspunctes der Bewegung aus der Bedingung bestimmt werden, dafs die Tangente an diesen Punct der Cycloïde mit der Axe der x, also auch der der x', den Winkel α macht, und dann ist

$$x' = x+(x') \quad \text{und} \quad y' = y+(y').$$

Nun folgt aus den Gleichungen (2.), wenn man differentiirt,

$$\frac{dx'}{d\vartheta} = r(1-\cos\vartheta); \quad \frac{dy'}{d\vartheta} = r.\sin\vartheta,$$

folglich

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta} = \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Für den Punct (x'), (y') ist also

$$\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\vartheta = \operatorname{tang}\alpha, \quad \vartheta = \pi-2\alpha,$$

mithin aus (2.)

$$(x') = r(\pi-2\alpha-\sin 2\alpha); \quad (y') = r(1+\cos 2\alpha) = 2r.\cos^2\alpha.$$

Die Gleichungen der Cycloïde, auf die ursprünglichen Coordinaten-Axen bezogen, sind also

$$3.\quad x+r(\pi-2\alpha-\sin 2\alpha) = r(\vartheta-\sin\vartheta) \text{ und } y+2r.\cos^2\alpha = r(1-\cos\vartheta).$$

Differentiirt man beide Gleichungen nach ϑ, so findet sich

$$\frac{dx}{d\vartheta} = r(1-\cos\vartheta) = y+2r.\cos^2\alpha,$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\vartheta} &= r.\sin\vartheta = \surd\{r^2-[r-(y+2r.\cos^2\alpha)]^2\}\\ &= \surd\{[r+r-(y+2r.\cos^2\alpha)](r-r+y+2r.\cos^2\alpha)\}\\ &= \surd\{(2r.\sin^2\alpha-y)(2r.\cos^2\alpha+y)\},\end{aligned}$$

folglich

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\left(\frac{2r.\cos^2\alpha+y}{2r.\sin^2\alpha-y}\right)},$$

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)} = \sqrt{\left(1+\frac{2r.\cos^2\alpha+y}{2r.\sin^2\alpha-y}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2r}{2r.\sin^2\alpha-y}\right)}.$$

Durch diesen Werth von $\frac{ds}{dy}$ geht die (1.) über in

$$4.\quad \int ds.v = \int dy.\sqrt{\left(\frac{2r}{2r.\sin^2\alpha-y}\right)}.\sqrt{(a^2-2gy)}$$

$$= 2\sqrt{(gr)}.\int dy.\sqrt{\left(\frac{\frac{a^2}{2g}-y}{2r.\sin^2\alpha-y}\right)}.$$

Um integriren zu können, setze man

$$5.\quad \sqrt{\left(\frac{\frac{a^2}{2g}-y}{2r.\sin^2\alpha-y}\right)} = z,$$

so wird

$$\frac{a^2}{2g}-y = (2r.\sin^2\alpha-y)z^2,$$

$$y = \frac{2r.\sin^2\alpha.z^2-\frac{a^2}{2g}}{z^2-1} = \frac{1}{2g}.\frac{4gr.\sin^2\alpha.z^2-a^2}{z^2-1},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2g}.\frac{8gr.\sin^2\alpha.z(z^2-1)-2z(4gr.\sin^2\alpha.z^2-a^2)}{(z^2-1)^2}$$

$$= \frac{z}{g}.\frac{a^2-4gr.\sin^2\alpha}{(z^2-1)^2},$$

folglich

$$\int ds.v = 2\sqrt{\frac{r}{g}}.(a^2-4gr.\sin^2\alpha).\int dz\frac{z^2}{(z^2-1)^2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{r}{g}}(a^2-4gr.\sin^2\alpha)\left(-\frac{z}{2(z^2-1)}+\tfrac{1}{2}\int dz\frac{1}{z^2-1}\right),$$

$$6.\quad \int ds.v = -\sqrt{\frac{r}{g}}(a^2-4gr.\sin^2\alpha)\left(\frac{z}{z^2-1}+\tfrac{1}{2}l\frac{z+1}{z-1}\right)+\text{const.}$$

Da die Basis der Cycloïde horizontal vorausgesetzt worden ist und die Axe der Parabel der Natur der Sache nach vertical sein mufs, so folgt, dafs die beiden Berührungspuncte beider Curven in gleicher Höhe über dem Horizonte liegen müssen, mithin gleiche Ordinaten haben. Um also die Constante in (6.) zu bestimmen, müfste der Ausdruck rechts zwischen zwei gleichen Grenzen genommen werden. Da dieses aber zu keinem Resultate führen würde, nimmt man, da auf beiden Seiten der durch den höchsten Punct der Cycloïde gehenden Verticalen die y, also auch die z genau dieselben sind, obigen Ausdruck statt einmal vom Anfangs- bis zum End-

puncte der Bahn, zweimal vom Anfangspuncte der Bewegung bis zum höchsten Punct der Cycloïde. Für jenen Punct ist

$$y = 0, \quad \text{also aus (5.)} \quad z = \frac{a}{2\sqrt{(gr)}.\sin\alpha}.$$

Für den höchsten Punct der Cycloïde ist $\vartheta = \pi$, also aus (3.)

$$y = 2r.\sin^2\alpha \quad \text{und daher} \quad z = \infty,$$

mithin

$$\int ds.v = -2\sqrt{\frac{r}{g}}.(a^2 - 4gr.\sin^2\alpha)\left(\frac{z}{z^2-1} + \tfrac{1}{2}\,l\frac{z+1}{z-1}\right)_{\infty \div \frac{a}{2\sqrt{(gr)}.\sin\alpha}},$$

oder wegen

$$\frac{\infty}{\infty^2-1} = \frac{1}{\infty - \frac{1}{\infty}} = 0, \quad \text{und} \quad l\frac{\infty+1}{\infty-1} = l\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}} = l1 = 0,$$

$$\int ds.v = 2\sqrt{\frac{r}{g}}(a^2 - 4gr.\sin^2\alpha)\left(\frac{2a\sqrt{(gr)}.\sin\alpha}{a^2 - 4gr.\sin^2\alpha} + \tfrac{1}{2}\,l\frac{a+2\sqrt{(gr)}.\sin\alpha}{a-2\sqrt{(gr)}.\sin\alpha}\right),$$

7. $$\int ds.v = 4ar.\sin\alpha + \sqrt{\frac{r}{g}}(a^2 - 4gr.\sin^2\alpha)\,l\frac{a+2\sqrt{(gr)}.\sin\alpha}{a-2\sqrt{(gr)}.\sin\alpha}.$$

Für die freie Bewegung in der Parabel hat man folgende Gleichungen:

8. $$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

9. $$\frac{dx}{dt} = a.\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = a.\sin\alpha - gt,$$

10. $$x = a.\cos\alpha.t \qquad y = a.\sin\alpha.t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2 - 2ag\sin\alpha t + g^2t^2,$$

11. $$\int dt.v^2 = a^2.t - ag.\sin\alpha.t^2 + \tfrac{1}{3}g^2t^3 + \text{const.}$$

Dieses Integral mufs von $t = 0$ bis zu demjenigen t genommen werden, welches dem Endpuncte der Bahn entspricht. Die Ordinate dieses Punctes aber ist, wie wir oben gesehen haben, gleich der Ordinate des Anfangspunctes, also $= 0$, und dazu giebt die (10)

$$t = \frac{2a.\sin\alpha}{g},$$

mithin

12. $$\int dt.v^2 = \frac{2a^3.\sin\alpha}{g} - \frac{4a^3.\sin^3\alpha}{g} + \tfrac{8}{3}.\frac{a^3.\sin^3\alpha}{g} = \frac{a^3}{y}\sin\alpha(2 - \tfrac{4}{3}\sin^2\alpha).$$

Damit nun aber wirklich die Parabel und die Cycloïde zum zweiten Male sich berühren, müssen die Abscissen des höchsten Punctes der Cycloïde und des höchsten Punctes der Parabel einander gleich sein; wodurch man eine

Gleichung zur Bestimmung von a bekommt. Es ist aber für den höchsten Punct der Cycloïde $\vartheta = \pi$, also aus (3.)

$$x = r(2\alpha + \sin 2\alpha).$$

Für den höchsten Punct der Parabel hat man

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \text{also aus (9.)} \quad t = \frac{a.\sin\alpha}{g}$$

und dazu aus (10.)

$$x = \frac{a^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g} = \frac{a^2.\sin 2\alpha}{2g}.$$

Dies giebt die Gleichung

$$r(2\alpha + \sin 2\alpha) = \frac{a^2.\sin 2\alpha}{2g},$$

$$13. \quad a^2 = \frac{4gr(2\alpha + \sin 2\alpha)}{2\sin 2\alpha}.$$

Dieser Werth für a in (7.) und (12.) substituirt, giebt für die Cycloïde

$$14. \quad \int ds.v = 8r(gr)^{\frac{1}{2}} \left\{ \sin\alpha \left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha} - \sin^2\alpha\right) l \frac{\left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \sin\alpha}{\left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} - \sin\alpha} \right\}$$

und für die Parabel

$$15. \quad \int ds.v = 8r(gr)^{\frac{1}{2}} \sin\alpha \left(2 - \tfrac{4}{3}\sin^2\alpha\right) \left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Um also das Princip der kleinsten Wirkung zu prüfen, braucht man nur

$$\sin\alpha \left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha} - \sin^2\alpha\right) l \frac{\left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \sin\alpha}{\left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} - \sin\alpha} = A$$

und

$$2\sin\alpha \left(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2\alpha\right) \left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} = B$$

für verschiedene Werthe von α zu berechnen und zu sehen, ob immer $A > B$ ist. Allein man findet für

$\alpha =$	30°	45°	60°	75°
$A =$	0,9677214	1,3758234	1,8968039	3,047466,
$B =$	0,967445	1,373979	1,935173	4,020396;

woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung von selbst erhellt.

III. Sieht man nun nach dem Beweise, ob etwa in diesem ein verborgener Fehler stecke, der das Resultat erklärte, so fragt sich zu-

erst: welches ist die unabhängige Veränderliche, nach welcher die Variationen von $\int ds.v$ genommen werden? Denn irgend eine mufs man offenbar haben. Die französischen Mathematiker, welche ich vergleichen konnte, sagen *alle:* man variire $\int ds.v$, aber nicht, nach was. Das Nächstliegende jedoch ist, wie überall sonst in der Mechanik, wo nichts Besonderes bemerkt ist, so auch hier, die Zeit t als unabhängige Veränderliche anzunehmen. Geschieht aber dies, so ergiebt sich als der erste Uebelstand, dafs dann die Grenzen des Integrals von einer Curve zur andern sich gleichfalls ändern; denn die Endpuncte der Bahnen sind zwar gegeben, aber keinesweges die Zeit, in welcher sie durchlaufen werden. In diesem Falle wäre also

$$\delta\int ds.v \quad \textit{nicht} \quad = \int\delta(ds.v);$$

wie es vorausgesetzt wird. Deswegen aber die Nachbarcurven, die beim Maximum oder Minimum in Betracht kommen können, auf diejenigen zu beschränken, die in gleicher Zeit durchlaufen werden, ist, wie sogleich gezeigt werden soll, unnöthig. Dann fragt es sich aber weiter, ob man den Zweck auch erreiche, wenn nach t variirt wird. Es soll unter allen Curven diejenige gesucht werden, für welche $\int ds.v$ ein Minimum wird. Die Form dieser Curven aber ist ganz unabhängig von der Zeit, in welcher sie durchlaufen werden; und aufserdem würde man, wenn man nach t variirte, auch noch verschiedene Arten der Bewegung in einer und derselben Curve erhalten; um die es sich aber hier nicht handelt. Um also diejenige Curve zu finden, für welche $\int ds.v$ ein Minimum wird, mufs man nicht nach t variiren, sondern nach einem Ausdruck, der aus den Coordinaten der Bahn *geometrisch* zusammengesetzt ist, etwa einem Radius-vector, oder dergl.; wobei dann auch die Grenzen constant sind. Dies hat im vorliegenden Falle um so weniger Schwierigkeit, als der Voraussetzung gemäfs v eine blofse Function von x, y, z, ohne t explicit zu enthalten, und s ohnehin eine geometrische Gröfse ist. Bezeichnet man also die aus x, y, z geometrisch zusammengesetzte Function, nach welcher variirt werden soll, mit u, so läfst sich der Beweis folgendermafsen führen. Es ist

$$1. \quad \int ds.v = \int du.v.\frac{ds}{du},$$

$$2. \quad \delta\int ds.v = \int du.\left(\frac{ds}{du}\delta v + v.\delta\frac{ds}{du}\right),$$

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2,$$

$$3. \quad \frac{ds}{du}.\delta\frac{ds}{du} = \frac{dx}{du}.\frac{d\delta x}{du} + \frac{dy}{du}.\frac{d\delta y}{du} + \frac{dz}{du}.\frac{d\delta z}{du},$$

folglich, wegen

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du}.\frac{du}{dt},$$

$$4. \quad v.\delta\frac{ds}{du} = \frac{dx}{dt}.\frac{d\delta x}{du} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\delta y}{du} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\delta z}{du}.$$

Aus der Gleichung

$$v^2 = C + 2\int(Xdx + Ydy + Zdz)$$

folgt, wenn der Voraussetzung gemäfs $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist und nach u variirt wird,

$$5. \quad v.\delta v = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

mithin wegen

$$\frac{ds}{du} = \frac{ds}{dt}.\frac{dt}{du} = v.\frac{dt}{du},$$

$$6. \quad \frac{ds}{du}.\delta v = \frac{dt}{du}(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Substituirt man den Werth von $v.\delta\frac{ds}{du}$ aus (4.) und den von $\frac{ds}{du}\delta v$ aus (6.) in die (2.), so ergiebt sich

$$\delta\int ds.v = \int_{u'}^{u''} du\left\{\frac{dt}{du}(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \frac{dx}{dt}.\frac{d\delta x}{du} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\delta y}{du} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\delta z}{du}\right\},$$

wenn u' und u'' die Werthe von u am Anfang und am Ende der Bahn bezeichnen. Durch theilweises Integriren und wegen

$$\frac{d}{du}.\frac{dx}{dt} = \frac{dt}{du}.\frac{d^2x}{dt^2}$$

erhält man hieraus

$$\delta\int ds.v = \left\{\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right\}_{u'' \div u'}$$
$$+ \int_{u'}^{u''} du\frac{dt}{du}\left\{\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}.$$

Nun ist aber an beiden Grenzen $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$ und, nach bekannten Gleichungen der Dynamik,

$$X = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = \frac{d^2z}{dt^2};$$

also ist

$$7. \quad \delta\int ds.v = 0.$$

Daraus folgt nun aber noch keineswegs, wie gewöhnlich geschlossen wird, dafs $\int ds.v$ ein Maximum oder Minimum sei, sondern, um entscheiden zu können, ob überhaupt ein Maximum oder Minimum stattfinde, und im bejahenden Fall, welches von beiden, ist $\delta^2\int ds.v$ zu untersuchen. Aus der Gleichung (2.) folgt aber

$$8.\quad \delta^2\int ds.v = \int du\left(\frac{ds}{du}.\delta^2 v + 2\delta v.\delta\frac{ds}{du} + v.\delta^2\frac{ds}{du}\right).$$

Variirt man die (3.) und (5.) noch einmal, so erhält man

$$9.\quad \frac{ds}{du}\delta^2\frac{ds}{du} + \left(\delta\frac{ds}{du}\right)^2$$

$$= \frac{dx}{du}.\frac{d\delta^2 x}{du} + \left(\frac{d\delta x}{du}\right)^2 + \frac{dy}{du}.\frac{d\delta^2 y}{du} + \left(\frac{d\delta y}{du}\right)^2 + \frac{dz}{du}.\frac{d\delta^2 z}{du} + \left(\frac{d\delta z}{du}\right)^2,$$

$$10.\quad v\delta^2 v + (\delta v)^2$$

$$= X\delta^2 x + \frac{dX}{dx}(\delta x)^2 + \frac{dX}{dy}\delta x.\delta y + \frac{dX}{dz}\delta x.\delta z$$

$$+ Y\delta^2 y + \frac{dY}{dx}\delta x.\delta y + \frac{dY}{dy}(\delta y)^2 + \frac{dY}{dz}\delta y.\delta z$$

$$+ Z\delta^2 z + \frac{dZ}{dx}\delta x.\delta z + \frac{dZ}{dy}\delta y.\delta z + \frac{dZ}{dz}(\delta z)^2$$

$$= X\delta^2 x + Y\delta^2 y + Z\delta^2 z + \frac{dX}{du}(\delta x)^2 + 2\frac{dX}{dy}\delta x.\delta y + 2\frac{dX}{dz}\delta x.\delta z$$

$$+ \frac{dY}{dy}(\delta y)^2 + 2\frac{dY}{dz}\delta y.\delta z + \frac{dZ}{dz}(\delta z)^2.$$

Denn denkt man sich $\int(X dx + Y dy + Z dz)$ wirklich integrirt, so dafs

$$\int(X dx + Y dy + Z dz) = F(x, y, z)$$

ist, so hat man

$$X = \frac{dF}{dx}; \qquad Y = \frac{dF}{dy}; \qquad Z = \frac{dF}{dz},$$

also

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}; \qquad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}; \qquad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

Die (9.) mit $\frac{du}{dt}$, multiplicirt giebt

$$11.\quad v.\delta^2\frac{ds}{du} + \frac{du}{dt}\left(\delta\frac{ds}{du}\right)^2$$

$$= \frac{du}{dt}\left\{\frac{dx}{du}.\frac{d\delta^2 x}{du} + \left(\frac{d\delta x}{du}\right)^2 + \frac{dy}{du}.\frac{d\delta^2 y}{du} + \left(\frac{d\delta y}{du}\right)^2 + \frac{dz}{du}.\frac{d\delta^2 z}{du} + \left(\frac{d\delta z}{du}\right)^2\right\}.$$

Die (10.), mit $\frac{dt}{du}$ multiplicirt, giebt

$$12. \quad \frac{ds}{du}.\delta^2 v + \frac{dt}{du}(\delta v)^2$$
$$= \frac{dt}{du}\Big\{X.\delta^2 x + Y.\delta^2 y + Z.\delta^2 z + \frac{dX}{dx}(\delta x)^2 + 2\frac{dX}{dy}\delta x.\delta y + 2\frac{dX}{dz}\delta x.\delta z$$
$$+ \frac{dY}{dy}(\delta y)^2 + 2\frac{dY}{dz}\delta y.\delta z + \frac{dZ}{dz}(\delta z)^2\Big\}.$$

Wird nun in (11.) $\frac{du}{dt}\left(\delta\frac{ds}{du}\right)^2$ und in (12.) $\frac{dt}{du}(\delta v)^2$ auf die rechte Seite gebracht, werden dann beide Gleichungen addirt und wird auf beiden Seiten der so entstehenden Gleichung noch $2\delta v.\delta\frac{ds}{du}$ hinzugefügt, so bekommt man

$$13. \quad \frac{ds}{du}.\delta^2 v + 2\delta v.\delta\frac{ds}{du} + v.\delta^2\frac{ds}{du}$$
$$= -\Big\{\frac{dt}{du}(\delta v)^2 - 2\delta v.\delta\frac{ds}{du} + \frac{du}{dt}\left(\delta\frac{ds}{du}\right)^2\Big\}$$
$$+ \frac{dt}{du}(X.\delta^2 x + Y.\delta^2 y + Z.\delta^2 z) + \frac{dx}{dt}.\frac{d\delta^2 x}{du} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\delta^2 y}{du} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\delta^2 z}{du}$$
$$+ \frac{dt}{du}\Big\{\frac{dX}{dx}(\delta x)^2 + 2\frac{dX}{dy}\delta x.\delta y + 2\frac{dX}{dz}\delta x.\delta z + \frac{dY}{dy}(\delta y)^2 + 2\frac{dY}{dz}\delta y.\delta z$$
$$+ \frac{dZ}{dz}(\delta z)^2 + \left(\frac{d\delta x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)^2\Big\}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dt}{du}(\delta v)^2 - 2\delta v.\delta\frac{ds}{du} + \frac{du}{dt}\left(\delta\frac{ds}{du}\right)^2 = \frac{dt}{du}\left(\delta v - \frac{du}{dt}.\delta\frac{ds}{du}\right)^2$$
$$= \frac{dt}{du}\left(\delta v - \delta\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0,$$

$$\int_{u'}^{u''} du.\Big\{\frac{dt}{du}(X.\delta^2 x + Y.\delta^2 y + Z.\delta^2 z) + \frac{dx}{dt}.\frac{d\delta^2 x}{du} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\delta^2 y}{du} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\delta^2 z}{du}\Big\}$$
$$= \Big\{\frac{dx}{dt}\delta^2 x + \frac{dy}{dt}\delta^2 y + \frac{dz}{dt}\delta^2 z\Big\}_{u'' \div u'}$$
$$+ \int du.\frac{dt}{du}\Big\{\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right)\delta^2 x + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right)\delta^2 y + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right)\delta^2 z\Big\}$$
$$= 0.$$

Aus den beiden letztern Gleichungen, in Verbindung mit (13.) und (8.), folgt

$$14. \quad \delta^2\int ds.v = \int dt\Big\{\frac{dX}{dx}(\delta x)^2 + 2\frac{dX}{dy}\delta x.\delta y + 2\frac{dX}{dz}\delta x.\delta z + \frac{dY}{dy}(\delta y)^2$$
$$+ 2\frac{dY}{dz}\delta y.\delta z + \frac{dZ}{dz}(\delta z)^2 + \left(\frac{d\delta x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)^2\Big\}.$$

In jedem besonderen Falle mufs also noch untersucht werden, ob dieser Ausdruck nicht der Null gleich und ob er stets positiv oder stets negativ sei. Für die freie Bewegung in der Parabel hat man

$$X = 0, \quad Y = -g, \quad Z = 0,$$

mithin

$$\frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{dX}{dy} = 0, \quad \frac{dX}{dz} = 0, \quad \frac{dY}{dy} = 0, \quad \frac{dY}{dz} = 0, \quad \frac{dZ}{dz} = 0,$$

folglich

$$\delta^2 \int ds.v = \int dt \left\{ \left(\frac{d\delta x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)^2 \right\} \text{ stets} > 0,$$

also wirklich $\int ds.v$ ein Minimum.

Wie stimmt nun aber dies mit dem oben berechneten Beispiele? Erinnern wir uns hier, dafs aus den Gleichungen

$$\delta V = 0 \quad \text{und} \quad \delta^2 V > 0$$

nur dann geschlossen werden kann, V sei ein Minimum, wenn die Gröfse, nach deren steigenden Potenzen die variirte Function V fortlauft, so klein ist, dafs jedes Glied der Reihe maafsgebend ist für das Zeichen der Summe der Glieder von ihm an abwärts. Das Princip der kleinsten Wirkung gilt also nur in Beziehung auf die *nächst* anliegenden Curven, und obiges Beispiel gehört gar nicht in die Kategorie desselben.

Zu einer weitern Beschränkung des Princips, als den beiden eben angeführten, nämlich dafs $\delta^2 \int ds.v$ zuvor untersucht werden mufs, und dafs nur nächst-anliegende Curven in Betracht kommen können, etwa die Gröfse oder Richtung der Anfangsgeschwindigkeit in den Nachbarcurven betreffend, ist in dem Beweise selbst kein Grund vorhanden.

Die Anwendung endlich, die schon von dem Princip der kleinsten Wirkung gemacht worden ist, um für gegebene Kräfte die Curve der freien Bewegung zu finden, ist durch das bisher Bemerkte nicht ausgeschlossen. Für den Fall der freien Bewegung ist nach wie vor stets $\delta \int ds.v = 0$. So lange aber nicht bewiesen ist, dafs *nur* im Falle der freien Bewegung $\delta \int ds.v = 0$ ist, bleiben die auf jene Art gefundenen Resultate immer nur problematisch.

Tübingen, den 31. Juli 1841.

Crelle, Journal d. Math Bd XXIV Heft 2.

Facs.

Summatio Seriei

$$s = \frac{z^3}{1\cdot 3} - \frac{z^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{z^{11}}{1\cdots 11}$$ aequationem nostram

Differentiando erit foret $s = a \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}zz$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = zz - \frac{z^6}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{z^{10}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \frac{z}{1\cdot\cdot}$$ quantitatem varia. ponendo

Hinc dividendo per z

$$\frac{\partial s}{z\,\partial z} = z - \frac{z^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{z^9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \frac{z}{1\cdot\cdot}$$ $t z \partial z \cos \tfrac{1}{2}zz$

denuoque differentiando

$$\partial\cdot\frac{\partial s}{z\,\partial z^2} = 1 - \frac{z^4}{1\cdot 3} + \frac{z^8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} - \frac{z}{1\cdot\cdot}$$ $+ t \cos \tfrac{1}{2}zz$

unde manifestum est fore

$$\partial\,\frac{\partial s}{z\,\partial z^2} = 1 - sz$$ $+ \frac{z\,\partial t}{\partial z} \cos \tfrac{1}{2}zz$

$- zt \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}zz$

Hanc aequationem facile integraret, si modo unitas abesse $= 1 - tz \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}zz$

omissa foret $\partial\cdot\frac{\partial s}{z\,\partial z^2} = -$ $-\frac{\partial t}{zz} \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}zz = \partial z$

$\frac{2\,\partial s}{z\,\partial z^2}$ ducta et integrata

$$\frac{\partial s^2}{zz\,\partial z^4} = aa - \frac{ss}{\partial z^2}$$ z atque $-\frac{a\,\partial z}{zz} \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}zz = \partial z$.

sive homogeneitatis gratia $\quad$ trans per $\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}zz$

$: \tfrac{1}{2}zz^2 = \partial z$

$$\frac{\partial s^2}{zz\,\partial z^4} = \frac{aa - ss}{\partial z^2}$$

unde porro deducitur

$$z\,\partial z = \frac{\partial s}{\sqrt{aa - ss}}$$

hincque integrando

$$\tfrac{1}{a}zz = A \,\mathrm{Sin}\, \frac{s}{a}$$

$\frac{z}{zz^2}$ hic aqua haret

16.

Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général.

(Par *J. Steiner*, membre de l'acad. des sciences de Berlin.)

Second mémoire.*)

Des figures planes et sphériques. (Suite.)

Quoique la méthode de démonstration suivie dans le premier mémoire pour les figures planes et sphériques ne laisse rien à désirer par rapport à l'élégance et la généralité, et que, à cet égard, elle paraisse surpasser de beaucoup les méthodes que je vais exposer, je ne crains pas faire un ouvrage inutile en rapportant en peu de mots ces autres méthodes, parceque dans une matière comme celle qui nous occupe, qui a été si peu développée jusqu'à présent, il est bon de connaître plus d'une route propre à y pénétrer, chacune de ces routes pouvant avoir l'avantage de conduire à quelques théorèmes d'une manière plus aisée ou plus claire que toute autre, et la manière d'y procéder pouvant être utile dans d'autres cas. Ces démonstrations multipliées proviennent des divers essais que j'ai faits lors de mes premières recherches sur cette matière.

On a déjà fait remarquer au commencement du premier mémoire, qu'il n'y a parmi les quatre méthodes de démonstration suivantes qu'une seule qui soit applicable aux figures sphériques.

Seconde méthode de démonstration pour les figures planes et sphériques.

Premier théorème fondamental.

1. *De tous les triangles qui ont même base et même somme des deux autres côtés, le triangle isocèle est le plus grand.*

Voyez pour la démonstration le premier mémoire (3).

---

*) Ce mémoire, comme le premier, réimprimé dans le précédent cahier, a été composé par l'auteur en langue allemande. Nous devons à l'obligeance de Mr. le docteur *Foelsing*, prof. au collège français de Berlin, la traduction qu'on imprime ici. (*C.*)

Second théorème fondamental.

2. ***De tous les triangles qui ont le même angle au sommet et la même somme des côtés de cet angle, le triangle isocèle est le plus grand et sa base la plus petite.***

Démonstration. Des deux triangles ACB et DCE (*Planche* III, *fig.* 1) qui ont le même angle au sommet supposons le premier isocèle, $CA = CB$, et de plus $AC + BC = DC + EC$; on a d'abord $AD = BE$, $\alpha = \beta$. Que l'on fasse $DF = DA = BE$, on en conclura $\gamma = \alpha = \beta$, et le triangle DFH égal au triangle EBH, donc triangle $DAH > EBH$, et par conséquent aussi triangle $CAB > DCE$, ce qui est la première partie du théorème.

La 2[de] partie suit de ce que $DH = HE = \frac{1}{2}DE$, et $FH = HB$, et de ce que, DG étant perpendiculaire à AF, on a $AG = GF$, et par conséquent $GH = \frac{1}{2}AB$; mais dans le triangle rectangle DGH, $DH > GH$ ce qui revient à $\frac{1}{2}DE > \frac{1}{2}AB$ et $DE > AB$.

Remarque. Pour les triangles sphériques la démonstration serait en général la même (1[er] mémoire I, 16) en distinguant toutefois trois cas savoir: la somme des côtés est ou plus grande, ou égale, ou plus petite que la moitié d'un grand cercle; car ce n'est que dans le premier cas que le triangle isocèle est un *maximum*, tandis qu'il est un *minimum* dans le 3[me], et ni l'un ni l'autre dans le second cas, tous les triangles dans lesquels la somme des deux côtés est égale à la demi-circonférence étant équivalents. Mais dans tous ces cas le triangle isocèle a la plus petite base.

3. *Corollaires* I. ***De tous les triangles qui satisfont aux conditions énoncées dans le théorème précédent celui dans lequel la différence des côtés des angles est la plus grande, est le plus petit, et sa base est la plus grande; et réciproquement.***

Car comme d'après la démonstration précédente (2) la différence entre le triangle isocèle ACB (*fig.* 1) et un triangle scalène quelconque DCE est égale à un triangle isocèle ADF dont le côté $AD (= FD = BE)$ est $= \frac{1}{2}(CE - CD)$, c'est à dire égale à la moitié de la différence entre les côtés du triangle DCE, il s'ensuit que ce triangle DCE sera d'autant plus petit, que la différence de ces côtés sera grande. — La base DE grandira en même tems; car dans le triangle rectangle DGH la cathète GH a une grandeur constante, tandisque l'autre cathète GD grandit en même tems que AD; l'hypoténuse DH et la base DE grandiront donc également.

II. ***Le lieu des milieux (H) des bases (DE) de tous les triangles (DCE) dont il est question dans le théorème (2) est une droite fixe, savoir: la base AB du triangle isocèle ACB.*****)*

III. ***De tous les triangles équivalents qui ont le même angle au sommet C, c'est le triangle isocèle qui a la plus petite base et la plus petite somme des côtés de l'angle C, et par conséquent le plus petit périmètre.*******)**

Soit *ACB* (*fig.* 1) un triangle isoscèle; que l'on se figure un triangle D_1CE_1 à côtés inégaux et équivalent à *ACB*, il existera un triangle *DCE* semblable à D_1CE_1 et ayant la même somme des côtés que *ACB*; mais $DCE < ACB$ (2), et par conséquent $DCE < D_1CE_1$; en outre $DE > AB$ et $CD + CE = CA + CB$; il s'ensuit donc que $D_1E_1 > AB$ et $CD_1 + CE_1 > CA + CB$.

---

*) Que l'on se représente encore un second triangle scalène D_1CE_1, on aura $DD_1 = EE_1$, et le théorème peut être mis sous la forme suivante:

Etant donnés deux points D *et* E *dans deux droites fixes* CA *et* CB, *si l'on prend deux autres points* D_1 *et* E_1 *sur les mêmes lignes et respectivement à égale distance des points* D *et* E, *de manière que* $DD_1 = EE_1$, *le lieu du milieu* H_1 *de la ligne* D_1E_1 *est une droite* AB *qui coupe les droites fixes données sous des angles égaux. Si sur les deux côtés opposés de* E *on prend simultanément deux points* E_1 *et* E' *à égale distance de* E, *les lieux des milieux* H_1 *et* H' *des droites* D_1E_1 *et* D_1E' *sont respectivement deux droites* AB *et* A_1B_1 *perpendiculaires l'une à l'autre et coupant l'une et l'autre les droites fixes données sous des angles égaux.*

Observons encore que: *Les perpendiculaires sur les lignes* D_1E_1 *élevées aux milieux* H_1 *se rencontrent toutes dans un point fixe* p, *de même que les perpendiculaires sur les lignes* D_1E' *élevées aux milieux* H' *se rencontrent toutes dans un point* p_1. *Car les lignes* D_1E_1 *et* D_1E' *sont, dans toutes leurs positions, respectivement tangentes à deux paraboles* P *et* P_1, *lesquelles ont les droites fixes* CA *et* CB *pour tangentes communes, les points* p *et* p_1 *pour foyers et les droites* AB *et* A_1B_1 *pour tangentes au sommet; les axes de ces paraboles divisent les angles formés par les droites fixes données en parties égales, et se rencontrent au point* C *sous des angles droits.*

**) On démontre aisément que: Les bases de deux triangles quelconques qui remplissent les conditions énoncées dans ce théorème se coupent en parties qui sont dans le même rapport; ce rapport peut être rapproché du rapport 1 : 1 autant que l'on voudra, sans cependant jamais atteindre à cette limite, de manière qu'aucune base n'est coupée au point du milieu; tous les autres points au contraire peuvent être regardés comme points d'intersection avec une autre base, mais toujours il n'existe qu'une seule base qui coupe la base donnée dans le point en question. On sait que toutes ces bases sont touchées au milieu par une hyperbole qui a les côtés *CA* et *CB* pour asymptotes. Sur la surface de la sphère toutes les bases sont touchées par une section conique sphérique.

Il s'ensuit encore que: *De tous les triangles qui ont le même angle au sommet et dont les bases passent par le même point* H, *celui dont la base est divisée au point* H *en deux parties égales est un minimum.* Car *H* étant le milieu de la base *DE* (*fig.* 1), et *AB* étant une autre base, on aura toujours, en menant *DF* de manière que angle $FDH = BEH$, triangle $FDH = BEH$, donc triangle $ADH > BEH$, et par conséquent triangle $ACB > DCE$.

IV. 1°. *De tous les triangles qui ont le même angle* C *au sommet et le même périmètre, le triangle isocèle a la plus grande surface et la plus grande somme des côtés de cet angle, par conséquent la plus petite base.*

Supposons que le triangle isocèle *ACB* (fig. 1) ait le périmètre voulu, et qu'un autre triangle *DCE* ait la même somme des côtés que *ACB*, il aura une plus grande base, par conséquent un plus grand périmètre et une plus petite aire que *ACB*. Ce triangle deviendra encore plus petit si l'on rapproche *DE* parallèlement à lui-même du sommet *C*, jusqu'à ce que le périmètre de *DCE* est égal à celui de *ACB*; aussi la somme des côtés de l'angle *C* diminue-t-elle en même temps.

2°. *De tous le triangles qui ont le même angle au sommet* C, *et dans lesquels la différence entre la somme des côtés de cet angle et la base est la même, le triangle isocèle est un maximum et sa base est un minimum.*

La démonstration de cette proposition se rattache au théorème n° 3, II. du premier mémoire. Il existe entre cette proposition et celle qui précède (1°) un rapport particulier qui résultera du théorème VIII. et de la proposition suivante.

Dans l'une et l'autre des deux propositions qui précèdent il existe un arc de cercle qui touche toutes les bases des triangles qui satisfont aux conditions énoncées dans la proposition; encore cet arc touche-t-il dans ses points extrêmes les côtés de l'angle C. *Si l'angle donné est le même dans les deux propositions, et que le périmètre de* (1°) *soit égal à la différence de* (2°), *ces deux arcs sont des parties du même cercle; etc.*

V. *De tous les triangles qui ont le même angle au sommet* C, *et dont les bases sont égales, c'est le triangle isocèle qui est le plus grand et dans lequel la somme des côtés de l'angle* C *est la plus grande.*

Car supposons encore que les triangles *ACB* et *DCE* (*fig.* 1) aient la même somme des côtés, et que l'on fasse glisser la base *DE* parallèlement à elle-même vers *C* jusqu'à ce qu'elle devient égale à *AB*, l'aire et la somme des côtés du triangle *DCE* diminuent, et deviennent par conséquent plus petites que l'aire et la somme des côtés de *ACB*.

Si les côtés de l'angle *C* des propositions précédentes sont limités par une droite quelconque *IK* ou *LM* (*fig.* 2), et que l'on regarde cette droite et les angles adjacents *I* et *K* ou *L* et *M* comme donnés, on a les corollaires suivants:

VI. *Etant donnés la base* IK *ou* LM *d'un triangle* IKBA *ou* LMBA *(fig. 2), les angles adjacents à la base* I *et* K *ou* L *et* M, *et la somme des côtés adjacents* IA + KB *ou* LA + MB, *le quatrième côté* AB *est un minimum et l'aire est en général un maximum ou un minimum, si les deux angles non-donnés* A *et* B *sont égaux entre eux. L'aire est respectivement un maximum ou un minimum selon que la somme des angles donnés est plus grande ou plus petite que* π; *si cette somme est* $= \pi$ *l'aire de tous ces quadrilatères est constante.* Consequence de n° 2.

VII. *Etant donnés la base* IK *ou* LM *d'un quadrilatère* IKBA *ou* LMBA, *les angles adjacents à la base et l'aire, le côté* AB *opposé à la base est un minimum, et la somme des deux autres côtés est un minimum ou un maximum si les deux angles non-donnés sont égaux. Selon que la somme des deux angles donnés est plus grande ou plus petite que* π, *la somme de ces côtés est respectivement un minimum ou un maximum; si au contraire la somme des angles est* $= \pi$, *la somme des côtés est constante.* Conséquence de III.

VIII. 1°. *Etant donnés la base* IK *d'un quadrilatère* IKBA, *les angles adjacents et la somme des trois autres côtés, l'aire et la somme des deux côtés adjacents à la base sont des maxima et le quatrième côté est un minimum, lorsque les deux angles non-donnés sont égaux entre eux* (IV, 1°).

2°. *Etant donnés la base* LM *d'un quadrilatère* LMBA, *les angles adjacents et la différence entre la somme des deux côtés adjacents à la base et le quatrième côté* (LA + MB — AB), *l'aire, la somme des côtés adjacents et le quatrième côté sont des minima, lorsque les angles non-donnés* A *et* B *sont égaux entre eux.*

Si la somme des angles donnés ($L + M$) est plus grande que π, les deux côtés AL et BM, prolongés au-delà de L et M, se rencontrent en un point C_1; on peut donc passer de cette proposition à celle de (IV, 2°).

IX. *Etant donnés la base* IK *ou* LM *d'un quadrilatère* IKBA *ou* LMBA, *les deux angles adjacents et le côté opposé* AB, *si les deux autres angles sont égaux entre eux, l'aire et la somme des deux autres côtés sont des maxima ou des minima, selon que la somme des deux angles donnés est plus grande ou plus petite que* π (V.). *Cette proposition n'embrasse pas le cas où la somme des deux angles donnés est égale à* π.

Remarque. Ces différents corollaires peuvent être étendus à des polygones et des courbes quelconques; de cette manière on parvient à des propositions, lesquelles, prises isolément, paraissent beaucoup plus difficiles que celles qui précèdent. Ce n'est cependant pas ici que nous pouvons en donner les détails.

4. I. *Etant donnés un angle d'un quadrilatère, et les deux côtés* a *et* b *opposés à cet angle, l'aire du quadrilatère sera un maximum, si le sommet de l'angle donné est à égale distance des trois autres sommets.*

Démonstration. En supposant qu'un quadrilatère maximum existe, on peut démontrer la proposition de la manière suivante:

Supposons que le quadrilatère $CABD$ (*fig.* 3) soit un maximum, AB et BD étant les côtés donnés (a et b), et C l'angle voulu; il s'ensuit d'abord que les deux côtés non-donnés CA et CD sont égaux entre eux. Car tirons la diagonale AD, et regardons la pour le moment comme donnée, il faut qu'elle renferme avec l'angle C un triangle maximum ACD; car s'il en existait un plus grand, le quadrilatère $CABD$ ne serait pas un maximum (le triangle ABD étant constant), ce qui est contraire à la supposition; il faut donc que CA soit $= CD$ (2).

Si la diagonale CB n'était pas égale aux côtés CA et CD, elle serait ou plus grande ou plus petite; on aurait donc p. e.

$$CA = CE < CB \quad \text{ou} \quad CA = CF > CB.$$

Mais CA étant $= CE = CD$, si l'on mène du milieu B_1 de BE par les milieux H et G des côtés AB et BD les droites B_1HI et B_1GK, on aurait triangle $ICB_1 > ACB$ et triangle $KCB_1 > DCB$ (2), par conséquent quadrilatère $ICB_1K > CABD$; mais comme $IB_1 < AB$ et $KB_1 < DB$ (n° 2), on pourrait encore mener de B_1 les droites $B_1A_1 = BA = a$ et $B_1D_1 = BD = b$, et l'on aurait à plus forte raison $CA_1B_1D_1 > CABD$, ce qui est contraire à l'hypothèse. CA ne peut donc pas être $= CE < CB$. On démontre de la même manière que CA ne saurait être $= CF > CB$. On a donc $CA = CB = CD$.

II. Lorsque l'angle donné C est $= \pi$ (par conséquent ACD une ligne droite) le quadrilatère se transforme en un triangle ABD par rapport auquel on a le theorème suivant:

Le plus grand de tous les triangles dont deux côtés AB = a *et* BD = b *sont de grandeur préscrite est celui dans lequel les trois sommets se trouvent à égale distance du milieu* C *du troisième côté* AD; *ou*

bien celui dans lequel l'angle B *compris entre les deux côtés donnes est égal à la somme* A *et* D *des deux autres angles.*

Ce théorème contient les deux théorèmes fondamentaux 6 et 14 du premier mémoire.

5. *Si dans le théorème* (4) *ce ne sont pas les côtés* a *et* b, *mais si c'est la somme* $a + b = s$ *qui est de grandeur préscrite, il faudra, pour que l'aire du quadrilatère soit un maximum, que ces deux côtés* a *et* b *soient* $= \frac{1}{2}s$.

On n'a qu'à tirer la diagonale *AD;* le triangle *ABD* n'est un maximum qu'autant que $AB = BD$ (1); mais comme le quadrilatère *CABD* ne saurait être un maximum tant que le triangle *ABD* ne l'est pas, il faut encore que $a = b = \frac{1}{2}s$.

6. I. *Etant donnés l'angle* C *d'un polygone* CABD .... *T, et les côtés* a, b, c .... *non adjacents à cet angle, l'aire du polygone est un maximum si le sommet de l'angle donné est à égale distance de tous les autres sommets. Cette aire maxima reste la même quel que soit l'ordre dans lequel ces côtés se succèdent.*

Démonstration. On démontre d'abord, comme on l'a fait pour le quadrilatère (4), que les côtés *CA* et *CT* qui contiennent l'angle donné *C* sont égaux. Que l'on même ensuite d'un sommet quelconque *P* du polygone les diagonales *AP* et *TP,* que l'on les regarde pour le moment comme données, et les segments du polygone retranchés par ces diagonales comme invariables: il faut que le quadrilatère *CAPT,* dont l'angle *C* et dont les côtés *AP* et *TP* sont donnés, soit un maximum, et par conséquent que *CA* soit $= CP = CT$ (4). Mais ce qui a été démontré pour le sommet *P,* a egalement lieu pour tous les autres sommets; ils se trouvent donc tous à égale distance du sommet *C.*

II. Si en particulier l'angle donné *C* est $= \pi$, et que par conséquent *ACT* soit une ligne droite, nous avons la proposition suivante:

Les côtés a, b, c, ... *d'un polygone, à l'exception de la base, étant donnés, son aire sera un maximum, si tous les sommets sont à égale distance du milieu* C *de la base, c'est à dire, s'il est inscrit à un cercle dont le diamètre est la base.*

7. Si dans les propositions précédentes (6) ce ne sont pas les côtés *a, b, c,* .... mais si c'est leur somme qui est donnée, l'aire du polygone est un *maximum maximorum* si l'on ajoute aux conditions énoncées encore

celle, *que tous les côtes sont égaux entre eux* (5). On aura par conséquent les propositions suivantes:

I. *Etant donnés un angle* C *d'un polygone, la somme* s, *et le nombre* m *de tous les côtés* a, b, c, ... *non-adjacents à l'angle* C, *l'aire du polygone est un maximum si tous ces côtés sont égaux entre eux, et que le sommet de l'angle donné soit à égale distance de tous les autres sommets.*

II. *Etant donnés, pour déterminer un polygone, la somme* s *et le nombre* m *de tous les côtés à l'exception de la base, qui est arbitraire, l'aire est un maximum, si tous ces côtés sont égaux entre eux, et que tous les sommets soient à égale distance du milieu* C *de la base.*

8. N'étant donnée que la somme s des côtés, et le nombre m étant arbitraire, on déduit par le raisonnement employé au n° 26. du premier mémoire, que l'aire maxima du polygone grandit lorsque le nombre m des côtés devient plus grand, et qu'il devient un maximum maximorum lorsque le nombre m devient infiniment grand, c'est à dire que la somme s se transforme en un arc de cercle. On peut donc établir les propositions suivantes:

I. *Etant donnés un angle* C *d'un polygone, et la somme* s *de tous les côtés non adjacents a cet angle, son aire maxima grandira à mesure que le nombre des côtés deviendra plus grand; l'aire finit par être un maximum maximorum lorsqu'on se représente le nombre des côtés comme infiniment grand, c'est à dire, lorsque le polygone se transforme en secteur de cercle.* (7, I.)

II. *Etant donnée la somme de tous les côtés d'un polygone, à l'exception de la base qui est arbitraire, son aire maxima* (7, II.) *grandira à mesure que le nombre de ses côtés devient plus grand; l'aire finit par être un maximum maximorum lorsque le nombre des côtés devient infiniment grand, c'est à dire, lorsque le polygone se transforme en un demi-cercle qui a la base arbitraire pour diamètre.*

III. *Etant donné le perimètre* s *d'un polygone, son aire maxima* (7, III.) *grandit à mesure que le nombre* m *des côtés devient plus grand; l'aire finit par être un maximum maximorum lorsque le nombre des côtés devient infiniment grand, c'est a dire lorsque le polygone se transforme en un cercle.*

Remarque générale.

9. Ce que nous venons de dire suffit pour donner une idée de cette méthode, et du parti que l'on peut en tirer. A partir d'ici on peut reprendre la première méthode, en démontrant d'abord la généralité du dernier théorème (8, III.), qu'il faut regarder comme théorème principal. A l'aide des théorèmes précédents on démontre aisément que: *De toutes les figures isopérimètriques, soit rectilignes, soit curvilignes, c'est le cercle qui a l'aire la plus grande.* Car si l'on s'imagine une figure curviligne quelconque, de perimètre donné, dont l'aire soit un maximum, on n'a qu'à y inscrire un quadrilatère quelconque *ABCD;* si l'on regarde les côtés de ce quadrilatère et les segments correspondants de la figure qui se trouvent hors du quadrilatère comme constants, il faut que l'aire du quadrilatère soit un maximum; car si son aire pouvait s'augmenter, l'aire de la figure entière s'augmenterait aussi, sans qu'il y eût changement de périmètre (les segments étant de grandeur constante), ce qui serait contraire à l'hypothèse; mais l'aire du quadrilatère n'est un maximum qu'autant que celui-ci est inscrit à un cercle; il faut donc que quatre points quelconques *A, B, C, D* du perimètre de la figure maxima se trouvent dans la circonférence d'un cercle, c'est à dire, il faut que cette figure maxima soit un cercle.

Troisième méthode pour les figures planes.

La méthode dont nous allons nous occuper a cela de particulier. qu'elle déduit tout d'un seul théorème auxiliaire fort simple. Nous ne donnerons ici que la deduction de quelques théorèmes, savoir celle des deux théorèmes fondamentaux (n° 3 et 6) du premier mémoire, et quelques autres théorèmes intéressants à cause de l'analogie qu'ils ont, comme on verra plus tard, avec certains théorèmes de Stéréométrie.

Théorème fondamental.

10. *De toutes les perpendiculaires abaissées d'un point* A *sur les droites qui passent par un autre point donné* B, *celle qui se confond avec la ligne* AB *est un maximum.* Ou bien:

De toutes les cordes d'un cercle qui partent du même point A *dans la circonférence, le diamètre AB est un maximum.*

La démonstration résulte de ce que dans un triangle rectangle l'hypoténuse est plus grande que chacune des cathètes.

Remarque. On peut déduire immédiatement de ce théorème le second théorème fondamental (6) du premier mémoire. Car AB étant un des côtés du triangle et BC l'autre, dont la position est arbitraire, il est évident que l'aire du triangle deviendra un maximum en même tems que la perpendiculaire abaissée du point A.

11. *De tous les triangles équivalents construits au dessus de la même base, le triangle isocèle a la plus grande somme des côtés latéraux, et par conséquent le plus grand périmètre.*

Démonstration. Soient ACB et ADB (*fig.* 4) deux triangles équivalents construits au dessus de la même base AB; soit ABC un triangle isocèle, c'est à dire $AC = BC$, ou $a = b$. Elevons aux points extrêmes A et B de ces deux lignes les perpendiculaires AM et BM, on aura un second triangle isocèle AMB; car $AM = BM = r$. La somme des aires des deux triangles isocèles, c'est à dire l'aire du quadrilatère $MACB$ est exprimée par

$$MACB = \tfrac{1}{2}r(a+b).$$

Abaissons du point M deux perpendiculaires sur les côtés $AD = a_1$ et $BD = b_1$ de l'autre triangle, l'une et l'autre perpendiculaire seront plus petites que r (10); désignons les respectivement par $r-x$ et $r-y$, et l'on aura pour la somme des aires des triangles AMB et ADB, c'est à dire pour l'aire du quadrilatère $MADB$ l'expression

$$MADB = \tfrac{1}{2}(r-x)a_1 + \tfrac{1}{2}(r-y)b_1 = \tfrac{1}{2}r(a_1+b_1) - \tfrac{1}{2}xa_1 - \tfrac{1}{2}yb_1.$$

Mais comme les quadrilatères $MACB$ et $MADB$ sont équivalents, on aura

$$r(a+b) = r(a_1+b_1) - xa_1 - yb_1,$$

par conséquent

$$a+b < a_1+b_1,$$

c'est à dire, la somme des côtés du triangle isocèle est plus petite que celle de tout autre triangle. (On sait qu'il existe une démonstration beaucoup plus simple de ce théorème.)

12. *De tous les triangles construits au dessus de la même base et avec la même somme des côtés, c'est le triangle isocèle qui est un maximum.*

Démonstration. Soient ACB et ADB (*fig.* 4) deux triangles dont le premier soit isocèle, et dans lesquels la somme $a+b$ soit $= a_1+b_1$, il s'ensuit de la démonstration précédente que $r(a+b) > r(a_1+b_1) - xa_1 - yb_1$, par conséquent quadrilatère $MACB > MADB$, et triangle $ACB > ADB$.

Ce théorème, qui n'est autre chose que le premier théorème fondamental (3) du premier mémoire, aurait pu être déduit indirectement du théorème précédent.

13. Sans ajouter d'autres développements nous allons passer à des théorèmes que l'on peut démontrer très-simplement par cette méthode. Traitons en premier lieu un problème que *Pappus* nous a transmis des anciens, dont plusieurs géomètres modernes se sont occupés, et sur lequel *Lhuilier* a fait des recherches historiques et critiques. C'est le problème suivant:

Les bases de deux triangles et la somme des quatre autres côtés étant donnés, trouver les conditions sous lesquelles la somme des aires est un maximum.

Solution. D'abord il est évident qu'il faut que les deux triangles soient isoscèles (12).

Soient AB et DE (*fig.* 5) les bases données, soient ACB et DFE des triangles isocèles construits au dessus de ces bases, tels que 1° la somme prescrite des quatre côtés étant $2s$, on ait $2a+2b=2s$, ou $a+b=s$, et que 2° les perpendiculaires AM, BM, DN et EN, élevées sur ces quatre côtés aux points de rencontre avec les bases, soient égales entre elles, c'est à dire que $AM=BM=DN=EN=r$. On aura pour la somme des aires des deux quadrilatères $MACB$ et $NDFE$ l'expression suivante (11):

$$MACB+NDFE = r(a+b) = rs.$$

Que l'on construise au dessus des bases données encore deux autres triangles isocèles AC_1B et DF_1E, dont les côtés respectivement égaux à a_1 et b_1 satisfassent à la condition préscrite dans le problème; on aura $a_1+b_1=a+b=s$ (ce qui n'a lieu qu'autant que $a_1>a$ et $b_1<b$, ou $a_1<a$ et $b_1>b$). Les perpendiculaires abaissées des points M et N sur les côtés des nouveaux triangles seront plus petites que r, et l'on peut les désigner respectivement par $r-x$ et $r-y$; la somme des aires des quadrilatère MAC_1B et NDF_1E sera donc exprimée par

$$MAC_1B+NDF_1E = (r-x)a_1+(r-y)b_1 = rs-xa_1-yb_1.$$

On voit que cette somme est plus petite que la première. Si l'on retranche de chacun des deux couples de quadrilatères les deux triangles AMB et DNE, on parvient au résultat suivant: triangle $ACB+DFE>AC_1B+DF_1E$; la somme des aires des triangles ACB et DFE est par conséquent plus grande que celle de deux autres triangles quelconques qui satisfont aux conditions du problème.

14. La solution du problème précédent (13) sert à établir un théorème que l'on peut énoncer des trois manières suivantes:

I. *Etant données les bases de deux triangles et la somme des quatre autres côtés, la somme des aires est un maximum lorsque les deux triangles sont isocèles, et que les parties des perpendiculaires élevées sur ces côtés à leurs points d'intersection avec les bases comprises entre ces points extrêmes des bases et les points d'intersection mutuelle de ces perpendiculaires, sont égales dans les deux triangles.*

Lorsqu'on élève des milieux des deux triangles *ACB* et *DEF* qui satisfont à ce théorème des perpendiculaires sur ces côtés, ces perpendiculaires, prises jusqu'aux points de leur intersection mutuelle, sont égales dans les deux triangles, car elles sont égales à la moitié des perpendiculaires désignées (13) par r. On peut donc énoncer le théorème de la manière suivante:

II. *La somme des aires des triangles en question est un maximum, lorsque les perpendiculaires abaissées des centres des cercles circonscrits aux triangles sur les côtés égaux des triangles, sont égales entre elles, ou lorsque les cercles qui touchent les côtés égaux des deux triangles dans leurs points de milieu sont respectivement égaux.*

Si l'on tire les droites *MC* et *NF* (*fig.* 5), on a angle $\alpha = \alpha_1$ et $\beta = \beta_1$, et comme $\sin\alpha_1 = \frac{1}{2} AB : r$, et $\sin\beta_1 = \frac{1}{2} DE : r$, on a encore

$$AB : DE = \sin\alpha_1 : \sin\beta_1 = \sin\alpha : \sin\beta,$$

c'est à dire:

III. *Les deux triangles dont la somme des aires est un maximum, ont la propriété, que leurs bases sont entre elles comme les sinus des angles adjacents* α *et* β.

C'est cette propriété que *Lhuilier* communique dans son ouvrage (De relatione mutua capacit. et termin. fig. etc.); il observe qu'il l'a trouvée par le calcul différentiel, et il paraît douter de la possibilité d'une démonstration géométrique élémentaire. Par sa solution il réfuta les fausses assertions de ses prédécesseurs sur ce problème (13).

15. I. *Etant données les bases de deux polygones, dont l'un de* m *et l'autre de* n *côtés, et la somme des autres côtés de l'un et de l'autre, la somme de leurs aires ne saurait être un maximum, à moins que* 1° *chacun des deux polygones ne soit inscrit à un cercle, et que tous les côtés, à l'exception de la base, ne soient égaux entre eux; et que* 2° *les*

perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés égaux ne soient égales dans les deux cercles; de manière que tous les côtés égaux soient touchés à leur point de milieu par un cercle concentrique au cercle circonscrit, et que les cercles qui touchent les deux figures soient égaux.

Démonstration. Il s'ensuit du n° 12, que les côtés non-donnés des deux polygones doivent être égaux; pour ce qui est de la propriété de ces figures de pouvoir être regardées comme inscrites à un cercle, nous la regardons comme connue par les deux premières méthodes, la troisième méthode ayant été discontinuée au n° 13.

Si l'on retranche des deux polygones, par des diagonales qui joignent les points extrêmes de deux côtés consécutifs non-donnés, deux triangles, et que l'on regarde ces diagonales (les bases des deux triangles) et la somme des quatre autres côtés comme connues, il faut que la somme des aires de ces deux triangles soit un maximum, et què par conséquent les perpendiculaires élevées sur le milieu de ces côtés et prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, soient toutes égales; mais ces points de rencontre ne sont autre chose que les centres des cercles circonscrits, c'est à dire deux points fixes; le théorème est donc démontré.

Ce théoréme peut être énoncé, analoguement à celui de n° 14, III., de la manière suivante:

II. *Pour que la somme des aires des deux polygones soit un maximum, il faut que l'un et l'autre soit inscrit à un cercle, que dans l'un et l'autre tous les côtés non-donnés soient égaux entre eux, et que l'on ait entre les bases données* AB *et* DE *et les angles adjacents* α *et* β *la proportion suivante:*

$$AB:DE = \frac{\sin\frac{m-1}{m-2}\alpha}{\cos\frac{1}{m-2}\alpha} : \frac{\sin\frac{n-1}{n-2}\beta}{\cos\frac{1}{n-2}\beta},$$

m *et* n *désignant le nombre des côtés des polygones.*

16. *Remarque.* Il est évident que le théoréme précédent peut être étendu à un nombre quelconque de polygones dont le nombre des côtés, les bases et la somme de tous leurs autres côtés réunis sont donnés, car la somme de leurs aires ne peut être un maximum, qu'autant que les perpendiculaires abaissées des centres des cercles circonscrits sur les côtés

non-donnés sont égales dans toutes ces figures. Si le nombre des côtés est supposé infiniment grand dans un de ces polygones, il se transforme en un segment de cercle dont le rayon est égal aux perpendiculaires des autres polygones. On peut parvenir de cette manière aux théorèmes sur les segments de cercles démontrés dans le premier mémoire (n° 52 et 54); ces théorèmes ne se présentent alors que comme des cas particuliers. Pour ce qui est des théorèmes plus généraux dont nous venons de nous occuper, il paraît qu'aucune des autres méthodes n'en fournit une démonstration bien simple.

Quatrième méthode pour les figures planes.

17. *Lemme* I. *De toutes les lignes entre deux points donnés, la ligne droite est un minimum (la plus courte).*

Lemme II. *La somme de deux côtés quelconques d'un triangle est plus petite que le troisième côté.*

Théorème fondamental.

18. I. *La droite* CD *menée du sommet* C *d'un triangle* ACB *au milieu* D *de la base* AB *divise le triangle en deux parties équivalentes; cette ligne est elle même plus petite que la moitié de la somme des deux autres côtés du triangle, donc* $2CD < AC + BC$. — La seconde partie du théorème découle du n° 17, II. Car on n'a qu'à prolonger CD au delà de D, à prendre dans ce prolongement un point C_1 tel que $CD = C_1D$, et à tirer AC_1, on aura $AC_1 = BC$, et comme dans le triangle CAC_1 on a $CA + AC_1 > CC_1$, on a aussi $CA + CB > 2CD$.

II. *La droite* dD *qui joint les milieux* d *et* D *des côtés parallèles* ab *et* AB *d'un trapèze* AabB *le divise en deux parties équivalentes, et est elle-même plus petite que la moitié de la somme des deux côtés non-parallèles* Aa *et* Bb. *Dans le parallélogramme ce côté* dD *est égal à la moitié de la somme des deux côtés en question, donc* Dd = Aa = Bb. — Cette proposition n'est qu'un corollaire de I., que l'on obtient en tirant une parallèle ab avec la base AB du triangle.

19. *Lorsqu'une figure est limitée par deux droites parallèles* AB *et* CD *(fig. 6, a), et par deux lignes* AC *et* BD, *ou* a *et* b, *de forme arbitraire, et que l'on mène entre ces lignes des droites* xy *parallèles à la base, le lieu des milieux* z *de ces droites est une ligne fixe* c, *qui di-*

vise la figure en deux parties équivalentes; cette ligne est en général plus petite que la moitié de la somme des lignes a *et* b, *à l'exception du cas particulier ou la transversale* xy *est de grandeur constante, cas dans lequel la ligne* c *est égale à la moitié de la somme de* a *et* b, *donc* $c = a = b$.

Car on n'a qu'à se figurer les transversales xy comme se succédant à des distances très petites, les parties des lignes a et b comprises entre ces transversales peuvent être regardées comme droites, et l'élément de la surface compris entre ces diagonales peut être regardé comme un trapèze; mais le théorème (18, II.) ayant lieu par rapport à chacun de ces trapèzes, il aura encore lieu par rapport à leur somme, c'est à dire par rapport à la figure entière.

Remarque. Ce théorème a encore lieu pour le cas particulier où l'une des deux bases devient égale à zéro, p. e. $CD = 0$ (*fig.* 6, *b*); de même si les deux bases AB et CD deviennent égales à zéro (*fig.* 6, *c*).

20. *La figure formée par les côtés d'un angle* C, *et par une ligne de forme arbitraire, mais de longueur préscrite* L, *est un maximum, lorsque cette ligne arbitraire est un arc de cercle dont le centre se trouve au sommet de l'angle* C.

Démonstration. Soit ACB (*fig.* 7) l'angle donné, et soit ADB la ligne de longueur préscrite L qui limite l'aire maxima, il faut que la droite CD qui divise l'angle donné en deux parties égales, divise aussi la ligne ADB et la figure entière $CADBC$ en deux parties égales, de manière que AD soit $= BD$ ($a = b$), et $CA = CB$. Car si cela n'avait pas lieu, il existerait une seconde figure CA_1D_1BC égale à $CADBC$, qui se confondrait avec $CADBC$, si l'on la fesait tourner autour de la droite CD; la ligne A_1DB_1 serait donc $= ADB$, $a_1 = a$ et $b_1 = b$, et la figure $ADB_1 = A_1DB$. Il existerait alors une ligne DE ou c, qui serait le lieu des milieux de toutes les lignes droites tirées parallèlement à la base AB_1 entre les lignes a et b_1, et qui par conséquent diviserait la figure ADB_1 en deux parties équivalentes, et serait elle-même soumise à la condition $2c < a + b_1$ ou $2c < a + b$; la figure A_1BD serait également divisée en deux parties équivalentes par la ligne $DF = c$; l'aire de la figure $CEDFC$ serait donc égale à celle de $CADBC$, bien que la ligne EDF fût plus petite que ADB, comme $2c < a + b$. Cette conséquence ne s'accorde dons pas avec l'hypothèse faite par rapport à la ligne ADB, car il est évident que,

cette ligne étant plus grande que EDF, elle peut servir à limiter une surface plus grande que celle qui est limitée par EDF. Il faut donc que les deux parties a et b de la ligne ADB soient égales, que $CA = CB$, et que les deux parties $CADC$ et $CBDC$ de la figure entière $CADBC$ soient égales.

On démontre de la même manière, que ces moitiés $CADC$ et $CBDC$ sont divisées en parties égales par les droites CG et CH, qui divisent les angles ACD et BCD en parties égales, et qui rencontrent les lignes a et b dans les points G et H (ni ces points, ni les droites CG et CH ne sont marqués dans la figure); de cette manière la figure est divisée en quatre parties égales, et il faut, que CA soit $= CD = CB$. En soumettant ces quatre quarts aux même raisonnements, on parvient au résultat $CA = CG = CD = CH = CB$ etc.; ce qui nous autorise à conclure, que tous les points de la ligne ADB sont à égale distance du sommet C, ce qu'il s'agissait de démontrer.

21. Nous n'allons pas entrer dans d'autres détails relativement à cette méthode, comme tout le reste peut être déduit de ce dernier théorème (20). Effectivement on peut en déduire les théorèmes sur le demi-cercle et le cercle entier, en égalant l'angle C respectivement à π et à 2π. On y rattachera ensuite les théorèmes sur les segments de cercle, les parties de cercle, les polygones, comme on a fait dans le premier mémoire. *) On aurait pu remplacer, ou faire précéder le théorème (20) par le théorème sur le cercle, que l'on aurait démontré de la manière suivante:

De toutes les figures planes et isopérimétriques le cercle est celle dont l'aire est un maximum; et de toutes le figures planes et équivalentes le cercle a le plus petit périmètre.

---

*) Le théorème auxiliaire (n° 1 ou n° 12 de ce mémoire, ou n° 3 du mémoire précédent) qui est indispensable pour quelques-unes de ces propositions, peut être déduit du théorème fondamental (18, I.) de la manière suivante. On se figure au-dessus de la même base AB, et du même côté de cette base, deux triangles ACB et ADB dans lesquels la somme des côtés est la même, et dont le premier est isocèle; on aura donc $AC + BC = 2AC = AD + BD$. On peut construire du même côté de la base un troisième triangle BD_1A, égal à BDA, tel que $BD_1 = AD$ et $AD_1 = BD$. La droite DD_1 est alors parallèle à AB, et si l'on désigne le milieu de DD_1 par F, CF sera perpendiculaire à AB. Dans le triangle DAD_1, on aura $2AF < AD + AD_1$ (18, I.), et comme $2AC = AD + BD = AD + AD_1$, on aura encore $AC > AF$; il faut donc que le point C se trouve au delà de F à partir de la base; la hauteur du triangle ACB est donc plus grande que celle de ADB ou AD_1B, et le même rapport aura lieu pour les aires des ces triangles.

1[re] *démonstration.* Que l'on s'imagine une figure d'un périmètre donné, dont l'aire soit un maximum. Chaque droite $AB = a$, qui divise son périmètre en deux parties égales α et β, divisera aussi la surface en deux parties équivalentes $a\alpha$ et $a\beta$; car si $a\beta$ était $< a\alpha$, on pourrait remplacer la ligne β par une ligne α_1, symétriquement égale à α, et la figure $\alpha\alpha_1$, isopérimétrique avec $\alpha\beta$ serait plus grande que celle-ci, ce qui est contraire à l'hypothèse; il faut donc que $a\alpha$ soit équivalent à $a\beta$. Si β différait de α_1, il existerait entre β et α_1 une troisième ligne γ, plus petite que $\frac{1}{2}(\beta+\alpha_1)$, par conséquent plus petite que β, et cependant on aurait $a\gamma = a\beta = a\alpha_1$ (19), ce qui serait évidemment encore contraire à l'hypothèse; α_1 et β ne peuvent donc pas différer, c'est à dire, il faut que β soit symétriquement égal à α, et que a soit un axe de la figure. Mais comme la direction de cet axe est tout-à-fait arbitraire, il s'ensuit que la figure en question est un cercle.

2[de] *démonstration.* Que l'on retranche de la figure á périmètre donné, qui est supposée un maximum, un segment $a\alpha$ au moyen d'une droite a; que l'on se figure ce segment encore dans une autre position que l'on obtiendra en le fesant tourner autour de la perpendiculaire élevée au milieu de la corde. Désignons par α_1 l'arc du segment dans cette seconde position. Si α_1 ne se confondait pas avec α, il existerait entre ces deux lignes une troisième β, telle que $2\beta < \alpha + \alpha_1$, c'est à dire $\beta < \alpha$, et $a\beta = a\alpha$ (19); ce qui est évidemment contraire à l'hypothèse. Il faut donc que α_1 se confonde entièrement avec α, et que α soit symétrique par rapport à la perpendiculaire mentionnée. Il faut donc aussi que la figure soit un cercle. — Si l'on retranche dans des endroits quelconques de la figure, par deux cordes égales a et b, deux segments $a\alpha$ et $b\beta$, on peut démontrer par des raisonnements tout-à-fait analogues (en plaçant l'un des segment sur l'autre), que les ars α et β sont égaux; ce qui suffit encore pour en conclure que la figure est un cercle.

Cinquième méthode pour les figures planes.

Cette méthode se fonde sur le principe de symétrie. Les maxima et minima se présentent sous un nouveau point de vue, intéressant par l'influence qu'ils exercent sur la forme des figures.

Théorème fondamental.

22. I. *Chaque triangle scalène* ACB (*fig.* 8) *peut être transformé en un autre triangle (isocèle)* acb, *dont la base* ab *est égale à celle du triangle donné* AB, *et qui lui est équivalent, mais dans lequel la somme des deux autres côtés est plus petite que la somme des côtés correspondants du triangle donné. Ce nouveau triangle est symétrique par rapport à l'axe* X *qui passe par le sommet* c *et le milieu* m *de la base sur laquelle il est perpendiculaire.*

II. *Chaque trapèze* ADEB (*fig.* 8) *peut être transformé en un autre trapèze* adeb *qui lui est équivalent, dont les côtés parallèles sont respectivement égaux à ceux du trapèze donné, c'est à dire* ab = AB *et* de = DE, *mais dans lequel la somme des deux autres côtés est plus petite que la somme des cotés correspondants du premier trapèze, c'est à dire* ad + be < AD + BE. *Ce nouveau trapèze sera symétrique par rapport à l'axe* X *qui passe par les milieux* m *et* n *des côtés parallèles, sur lesquels il est perpendiculaire.*

La démonstration de la première partie est simple et généralement connue; la seconde partie peut y être rattachée comme corollaire.

Le théorème II. reste encore exact pour le cas particulier, où AB est $= DE$, c'est à dire pour le cas où $ADEB$ est un parallélogramme, et par conséquent $adeb$ un rectangle.

23. A l'aide du théorème précédent un polygone convexe quelconque P peut être transformé en un polygone équivalent P_1, symétrique par rapport à un axe X, et d'un périmètre plus petit que P. Choisissons, pour fixer les idées, les exemples suivants:

1°. Soit triangle ABC (*Planche* IV, *fig.* 9) le polygone en question. On abaisse des sommets de ce triangle sur un axe arbitraire X les perpendiculaires Aa, Bb, Cc, on transporte la partie BD d'une de ces perpendiculaires, qui se trouve dans l'intérieur du triangle, dans une position symétrique par rapport à l'axe X, de manière que $bd = BD$ et $be = ed$; le quadrilatère $abcd$ est équivalent au triangle ABC, et d'un périmètre plus petit; car on sait que les triangles BAD et BCD sont respectivement équivalents à bad et bcd, et que $ab + ad < AB + AD$ et $cb + cd < CB + CD$ (22, I.).

Au moyen d'un nouvel axe Y, perpendiculaire à X, le quadrilatère $abcd$ peut être transformé en un quadrilatère équivalent $\alpha\beta\gamma\delta$, dont le

périmètre est encore plus petit, et qui est symétrique par rapport aux deux axes; les quatre côtés de ce quadrilatère sont par conséquent égaux entre eux (le quadrilatère est un rhombe), et le point d'intersection u des axes est son centre.

Un triangle donné quelconque peut donc être transformé au moyen de deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, X et Y, en un rhombe équivalent $\alpha\beta\gamma\delta$, de périmètre plus petit.

Cette transformation peut être effectuée au moyen d'un seul axe; car lorsque le triangle ABC est divisée en deux parties équivalentes par la perpendiculaire BDe (ce qui a lieu dès que $AD = DC$), le quadrilatère $abcd$ est un rhombe.

2°. Soit le pentagone $ABCDE$ (*fig.* 10) le polygone en question; on le transformera par un procédé analogue au moyen d'un axe X en un octogone $abe_1cdc_1eb_1$ équivalent au pentagone, mais d'un plus petit périmètre (les triangles et les trapézes correspondants des deux figures ont respectivement entre eux les relations etablies au n° 22.). — On transforme cet octogone, au moyen d'un nouvel axe Y, perpendiculaire à X, en un dodécagone équivalent et de plus petit périmètre, qui aura pour centre le point d'intersection des deux axes.

3°. De cette manière un polygone convexe quelconque P de m côtés peut être transformé au moyen d'un premier axe X_1 en un polygone symétrique P_1, équivalent et de plus petit périmètre, qui sera en général et tout au plus de $2m-2$ côtés; ce polygone peut être transformé au moyen d'un autre axe arbitraire X_2 en un second polyone symétrique P_2 de tout au plus $2(2m-2)-2$ côtés; en continuant de la même manière, on parvient au moyen du $n^{\text{ième}}$ axe X_n à un polygone symétrique de tout au plus $2^n(m-2)+2$ côtés, équivalent à tous ceux qui précèdent, et d'un plus petit périmètre. Si l'un de ces axes est perpendiculaire à celui qui précède. p. e. X_2 perpendiculaire à X_1, le polygone P_1 aura un centre (le point d'intersection des deux axes), et tout au plus $2(2m-4)$ côtés; dans ce cas tous les polygones que l'on obtient par la suite P_3, P_4, ... P_n, ont un centre et deux axes de symétrie perpendiculaires, quelle que soit la position des axes ultérieurs X_3, X_4, ... X_n.

24. Il résulte de ces exemples une méthode pour transformer un polygone convexe quelconque P en un autre polygone P_n équivalent, mais d'un plus petit périmètre et d'un plus grand nombre de côtés. Plus on

répète ces transformations, plus le nombre des côtés devient grand, et les côtés eux-mêmes deviennent petits; lorsqu'on s'imagine ces transformations répétées indéfiniment, le nombre des côtés devient infiniment grand et les côtés eux-mêmes deviennent infiniment petits; le polygone P_n s'approche donc de plus en plus d'une courbe, ou plutôt il se transforme en une courbe.

De la même manière chaque courbe fermée et convexe P peut être regardée comme un polygone d'un nombre infiniment grand de côtés infiniment petits, et peut être transformée par un procédé analogue, au moyen d'un axe de position arbitraire X_1, en une autre courbe P_1 de même aire, mais d'un plus petit périmètre, symétrique par rapport à l'axe X_1. Au moyen d'un second axe X_2, perpendiculaire à X_1, on parvient à une autre courbe équivalente, d'un périmètre plus petit encore, qui sera symétrique par rapport à deux axes, et qui aura par conséquent le point d'intersection de ces deux axes C pour centre. Au moyen d'autres axes arbitraires X_3, X_4, ... on obtient d'autres courbes équivalentes P_3, P_4, ..., dont les périmètres deviennent de plus en plus petits, et dont chacune a un centre et au moins deux axes de symétrie perpendiculaires l'un à l'autre. Par un choix convenable des nouveaux axes la différence entre le plus grand et le plus petit diamètre de la courbe diminuera de plus en plus. *)

On conclut de ce raisonnement qu'une figure convexe et fermée quelconque P, soit rectiligne, soit curviligne, soit rectiligne en partie et curviligne en partie, peut être transformée en une autre figure équivalente, mais de plus petit périmètre, tant que dans un certain sens elle n'a pas encore d'axe de symétrie. Si la figure donnée, ou si une des figures obtenues par les transformations, est symétrique par rapport à tous les axes, quelle que soit leur direction, elle reste constante par rapport à l'aire et le périmètre dans toutes les transformations ultérieures, ou, pour parler avec plus d'exactitude, il n'y a plus de transformation possible, car toutes les nouvelles figures seront égales à la figure donnée.

---

*) De cette manière une ellipse P peut être transformée par un seul axe convenablement choisi en un cercle dont tous les diamètres sont égaux. Car a et b étant les moitiés des deux axes de l'ellipse, on n'a qu'à construire une droite $r = \sqrt{(ab)}$, à porter cette droite comme rayon dans l'ellipse, et à mener l'axe X perpendiculairement sur ce rayon; la nouvelle figure P_1 sera un cercle. Comme le rayon r peut être porté en deux sens différents, l'axe X qui satisfait à la condition peut avoir deux positions différentes.

Une pareille figure qui a des axes de symétrie dans toutes les directions a aussi un centre par lequel tous ces axes passent; car d'après ce que nous avons vu plus haut, il suffit déjà de deux axes de symétric, perpendiculaire l'un à l'autre, pour qu'il existe un centre. Encore tous ces axes seront-ils égaux entre eux. Car en prenant arbitrairement deux axes X et Y de cette figure (*fig.* 11), on n'a qu'à tirer l'axe Z, qui fasse des angles égaux $\alpha = \beta$ avec les axes X et Y; au point extrème A de l'axe X il correspondra par rapport à l'axe Z un point D, situé en même tems dans le périmètre de la figure P et dans l'axe Y; D sera donc le point extrême de Y, et les demi-axes CA et CD seront égaux entre eux, de même que les axes entiers AB et DE. Il n'existe donc qu'une seule figure qui ait des axes de symétrie dans toutes les directions possibles; cette figure est le *cercle.*

25. On déduit de ces considérations le théorème fondamental suivant:

Théorème fondamental.

De toutes les figures qui renferment des surfaces équivalentes, le cercle a le plus petit périmètre; et réciproquement: de toutes les figures isopérimètriques, le cercle renferme la plus grande surface.

Car soit P une figure qui renferme une surface de grandeur préscrite, et dont le périmètre soit un minimum, il faut qu'elle soit symétrique dans tous les sens, c'est à dire qu'elle soit un cercle. Car si dans un certain sens elle n'était pas symétrique, elle pourrait être transformée à l'aide d'un axe X mené dans ce sens dans une figure équivalente et d'un périmètre plus petit, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

26. Par rapport aux considérations du n° 24 on peut encore proposer la question suivante:

Quelle forme une figure peut-elle avoir, qui a deux axes de symétrie, lesquels forment entre eux un angle α, et dont chacun ne rencontre le périmètre de la figure qu'en deux points?

La discussion de cette question mène au résultat suivant: La figure a en général encore d'autres axes; selon que α et π sont *commensurables* ou *incommensurables* le nombre de ces axes sera fini et déterminé, ou il sera indéfini.

I. Lorsque α et π sont commensurables, et que $\alpha : \pi = 1 : m$ (m désignant un nombre entier), la figure a en tout m axes de symétrie, qui

se rencontrent tous en un point C, et dont les parties comprises entre C et le périmètre sont alternativement égales, pourvu que l'on procède dans l'ordre dans lequel elles se succèdent autour du point C.*) Le périmètre de la figure se compose de $2m$ parties égales, dont chacune est comprise entre les points extrèmes de deux parties d'axes se succèdants immédiatement, tournées dans le même sens. Une de ces parties du périmètre peut être prise à volonté, soit droite, soit courbe; mais dès qu'elle est déterminée, les autres le sont également, comme elles sont toutes égales entre elles. Du reste il y a encore deux cas à distinguer, selon que m est un nombre *pair* ou *impair*.

1°. Si m est pair, C est le centre de la figure, et les axes sont alternativement égaux.

2°. Si m est impair, tous les axes sont égaux, mais ils sont tous divisés au point C en deux parties inégales; ces parties, comparées dans l'ordre indiqué, sont alternativement égales.

II. Si α et π sont incommensurables, le nombre des axes de symétrie est infiniment grand; il y en a donc dans tous les sens, ce dont on conclut que la figure est un *cercle*.

Lorsqu'on prend dans le périmètre de la figure un point quelconque P, il existe un autre point P_1 du périmètre qui correspond à P par rapport à un des axes, p. e. par rapport à X, et l'on a $CP = CP_1$; au point P_1 il correspond par rapport à l'axe Y un point P_2, et l'on a $CP_1 = CP_2$; au point P_2 il correspond par rapport à l'axe X un point P_3, à celui-ci, par rapport à l'axe Y, un point P_4, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Cette suite de points épuise, pour ainsi dire, la circonférence, et comme ils sont tous à égale distance du point d'intersection des axes C, il en résulte que la figure est un cercle dont C est le centre.

Des figures à trois dimensions.

Les corps prismatiques.

27. *De tous les prismes de même hauteur construits sur la même base, c'est le prisme droit qui a la plus petite surface latérale, et par*

*) Lorsqu'on a la proportion $\alpha : \pi = n : m$, dans laquelle n désigne également un nombre entier, la figure a encore m axes, entre les parties desquels la même relation subsiste toujours; seulement les axes X et Y ne se succèdent plus immédiatement, il y a au contraire $n-1$ axes entre eux.

conséquent la plus petite surface totale; et réciproquement: de tous les prismes de surface équivalente construits sur la même base, c'est le prisme droit qui a la plus grande hauteur et le plus grand volume.

La justesse de ce théorème est évident lorsque la base est un polygone. Si la base est une courbe, et que par conséquent le prisme se transforme en cylindre, on n'a, pour démontrer le théorème, qu'à regarder la base comme limite d'un polygone inscrit ou circonscrit.

28. *La surface latérale d'un prisme droit est équivalente à un rectangle dont la hauteur et la base son respectivement égales à la hauteur du prisme et au périmètre de la base.*

Le volume d'un prisme quelconque est équivalent au produit de la base par la hauteur.

29. I. *De tous les prismes de* n *côtés c'est le prisme droit et regulier qui a la propriété d'avoir:*

1° *la plus petite surface latérale, les bases étant équivalentes et les hauteurs étant égales.*

2° *la plus grande base et le plus grand volume, les surfaces latérales étant équivalentes et les hauteurs étant égales.*

3° *la plus grande hauteur et le plus grand volume, les bases et les surfaces latérales étant respectivement equivalentes;* et finalement

4° *la plus petite base et la plus grande hauteur, les surfaces latérales et les volumes étant respectivement équivalents.*

II. *De deux prismes droits et réguliers celui dont le nombre des côtés est le plus grand a la propriété d'avoir:*

1° *la plus petite surface latérale, les bases étant équivalentes et les hauteurs étant égales.*

2° *la plus grande base et le plus grand volume, les surfaces latérales étant équivalentes, et les hauteurs étant égales.*

3° *la plus grande hauteur et le plus grand volume, les bases et les surfaces latérales étant respectivement équivalentes.*

4° *la plus petite base et la plus grande hauteur, les surfaces latérales et les volumes étant respectivement équivalents.*

III. *De tous les corps prismatiques c'est le cylindre droit qui a la propriété d'avoir:*

1° *la plus petite surface latérale, les bases étant équivalentes, et les hauteurs étant égales.*

2° *la plus grande base et le plus grand volume, les surfaces latérales étant équivalentes, et les hauteurs étant égales.*

3° *la plus grande hauteur et le plus grand volume, les bases et les surfaces latérales étant respectivement équivalentes.*

4° *la plus petite base et la plus grande hauteur, les surfaces latérales et les volumes étant respectivement équivalents.*

Démonstration. D'après ce qui a été dit au n° 27 il ne peut être question dans tous ces cas que de prismes droits. Dans cette supposition les démonstrations des cas particuliers se feront comme suit:

I. 1°. La surface latérale étant équivalente à un rectangle dont la hauteur et la base sont respectivement égales à la hauteur du prisme et au périmètre de sa base (28), et cette hauteur étant donnée, il résulte que la surface latérale devient un minimum en même tems que le périmètre de la base, ce qui a lieu, lorsque la base est régulière.

2°. La hauteur et la surface latérale étant données, le périmètre de la base est connu, et il devient un maximum, lorsque la base est régulière.

3° La surface latérale étant donnée, la hauteur devient un maximum, lorsque le périmètre de la base est un minimum, c'est à dire lorsque la base est régulière.

4°. Nous observons d'abord que: *Dans chaque prisme droit le volume divisé par la surface latérale est égal à la base divisée par son périmètre.* Comme les deux premières de ces quatre grandeurs sont données, il résulte que leur quotient q est constant; il faut donc que la base et son périmètre grandissent en même tems, et diminuent en même tems (car leur quotient est le même). Que l'on se représente pour le moment l'aire de la base comme donnée, son périmètre est un minimum, et par conséquent le quotient un maximum, lorsque la base est régulière. Mais pour chaque polygone régulier ce quotient est égal au rayon du cercle inscrit, et diminue ou augmente par conséquent en même tems que l'aire du polygone diminue ou augmente; il n'existe donc qu'une seule base régulière B, pour laquelle ce quotient puisse être égal à q. Mais comme toute autre base plus petite que B, soit régulière, soit irrégulière, a un quotient plus petit, il ne peut pas être question d'elles, (car il faut que le quotient soit $= q$); la base B est par conséquent un minimum. On peut aussi faire

usage du raisonnement suivant. Observons d'abord que: ***Le volume d'un prisme régulier et droit est mesuré par la moitié du produit de la surface latérale par le rayon du cercle inscrit à la base.*** Soit P un prisme quelconque qui ait la surface latérale et le volume voulus, soit P_1 un polygone régulier et droit dont la base et la surface latérale soient respectivement équivalentes à la base et la surface latérale de P_1, on aura (3°) $P_1 > P$. Pour que P_1 diminue jusqu'à ce que $P_1 = P$, la surface latérale restant constante, il faut que le rayon de sa base, par conséquent aussi sa base, diminue; de là résulte la justesse du théorème.

II. La démonstration des quatre propositions énumérées sous II. se rattache à celle des propositions de I, pourvu que l'on ait égard au théorème du n° 26 du premier mémoire.

III. Les quatre propositions énoncées sous III. sont une conséquence immédiate de celles de II.

Remarque. De même que les propositions précédentes se fondent sur des propriétés des figures planes discutées plus haut, un grand nombre d'autres propositions sur les prismes peuvent être déduites de propositions analogues sur des figures planes. De cette manière on peut p. e. étendre immédiatement toute la suite de propositions sur les figures planes, contenues dans le premier mémoire, aux prismes droits de hauteur préscrite, qui ont la figure plane en question pour base; etc. Mais comme ces propositions ne contiennent rien de proprement stéréométrique, il suffit d'avoir signalé leur existence.

30. ***De tous les primes quadrilatéraux c'est le cube qui a la propriété d'avoir le plus grand volume, la grandeur de la surface étant prescrite, et la plus petite surface, la grandeur du volume étant préscrite.***

Que l'on se figure un prisme quadrilatéral de surface préscrite dont le volume soit le plus grand possible; si l'on se représente pour le moment la grandeur de la surface latérale et celle de la base comme données séparément, il faut que ce prisme soit droit et régulier, c'est à dire il faut que ce soit un parallélépipède qui a un quarré pour base. Mais comme chacun des deux autres couples de faces parallèles peut être pris pour bases, il faut que ces faces soient également des quarrés; le prisme en question sera donc un cube.

Remarque. Par rapport aux considérations ulterieures nous fesons resortir ici les propriétés characteristiques suivantes:

I. Dans le plus grand des prismes quadrilatéraux qui ont une surface préscrite, la surface latérale est le double de la somme des deux bases, c'est à dire la surface latérale est égale à deux tiers et chacune des deux bases égale à un sixième de la surface entière.

II. Ce prisme est circonscrit à une sphère qui touche chacune des six faces de ce prisme dans son centre de gravité.

31. Par les expressions:

1°. *Un polygone ou un prisme donné quant à son espèce,* nous entendrons par la suite que le nombre des côtés du polygone, ou que le nombre, l'espèce et la suite des faces (par conséquent aussi le nombre et l'espèce des angles solides) du polyèdre sont donnés.

2°. *Un polygone ou un polyèdre donné quant à la forme,* nous entendrons qu'il doit être respectivement semblable à un polygone ou à un polyèdre donné.

32. I. *De tous les prismes de* n *côtés de surface préscrite, celui qui est droit et régulier, et dont la base est un sixième de la surface, a le plus grand volume. Ce prisme particulier est circonscrit à une sphère qui touche chacune de ses faces dans son centre de gravité.*

II. *Si l'on substitue au nombre* n *des côtés successivement les valeurs* 3, 4, 5, 6, …., *le volume des prismes correspondants grandit toujours, la grandeur de la surface restant la même; et réciproquement: la grandeur de la surface diminue, le volume conservant la même grandeur;* ce dont il résulte que:

III. *De tous les corps prismatiques le cylindre droit dont la surface est quatre fois plus grande que la base, c'est à dire le cylindre dont la hauteur est égale au diametre de la base est par rapport à son volume un maximum maximorum, la surface étant de grandeur préscrite; et il est par rapport à sa surface un minimum minimorum, le volume étant de grandeur préscrite.*

Démonstration. Il résulte de ce qui précède (29) qu'il ne peut être question que de prismes droits et réguliers.

Que l'on se représente pour la démonstration de I. deux prismes droits et réguliers, l'un (P_n) de n côtés, et l'autre (P_4) de quatre côtés, de hauteurs égales et de bases circonscrites au même cercle. Les volumes des deux prismes, leurs surfaces et leurs bases sont alors respectivement dans

le rapport des périmètres des bases. La surface de P_n est par conséquent déterminée en même tems que la surface de P_4, et si par un changement simultané des deux prismes le volume de P_4 devient un maximum, le volume de P_n le sera également; il faut donc que P_n ait la propriété énoncée dans le théorème, comme la propriété analogue a lieu par rapport à P_4.

La démonstrations de II. et III. découlent sans difficulté de ce que nous venons de dire.

33. *La base d'un prisme triangulaire étant donnée quant à sa forme* (31), *et la somme des deux bases et d'une des trois faces latérales étant de grandeur préscrite, le volume est un maximum lorsque le prisme est droit (ou que du moins les bases sont perpendiculaires à la face latérale mentionnée) et que chacune des deux bases est un sixième de la somme préscrite.*

Démonstration. Soit *ACB* (*fig.* 11) la base du prisme P_3, que nous supposons droit, donnée quant à sa forme, mais non pas quant à sa grandeur; soit *AB* le côté au-dessus duquel se trouve la face latérale dont la somme avec les deux bases est d'une grandeur préscrite *S*; soit *C*, le sommet du triangle, le centre d'un quarré *DEFG* dont un côté *DG* se trouve dans la même direction que la base *AB* du triangle; soit *DEFG* la base d'un prisme droit P_4 qui ait la même hauteur que P_3, et qui change en même tems que celui-ci. Les volumes des deux prismes P_3 et P_4, de même que leurs bases, seront respectivement entre eux comme la base *AB* est au perimètre du quarré *DEFG*; mais le même rapport a lieu entre la partie préscrite *S* de la surface de P_3 et la surface totale de P_4; il s'ensuit donc que la surface de P_4 est donnée, dès que *S* est fixé, et que P_3 devient un maximum en même tems que P_4; ce dont on peut déduire la proposition énoncée.

Ce théorème peut être inverti, savoir: si au lieu de la somme *S*, le volume du prisme est d'une grandeur préscrite, il s'ensuit sous les mêmes conditions que la somme *S* est un maximum. — La plupart des propositions qui vont suivre, peuvent être inverties analoguement.

34 *Etant données la base d'un prisme de* n *côtés quant à sa forme, et sa surface totale quant à sa grandeur, le volume est un maximum lorsque le prisme est droit et que sa base est un sixième de sa surface.*

La démonstration de cette proposition résulte de celle du n° 33. On n'à qu'à se représenter outre le prisme droit P_n, dont la base B_n est de la

forme préscrite, un prisme triangulaire droit P_3, de même hauteur et de base équivalente, tel que l'un des côtés AB de la base ABC de P_3 soit égal au périmètre de la base B_n; établissons encore que cette base ABC ne change pas de forme. Les deux prismes ont alors le même volume. et la somme S des deux bases de P_3 et de la face latérale au-dessus de AB est équivalente à la surface voulue de P_n; ce dont résulte, d'après 33, la vérité de la proposition.

35. I. *Etant donnée la surface totale d'un prisme de* n *côtés, à l'exception d'une base, le volume est un maximum lorsque le prisme est droit et régulier, et que la base est équivalente à la moitié de la surface latérale. Si l'on égale* n *successivement à* 3, 4, 5, ... *les volumes des plus grands prismes vont toujours en croissant, de manière que le cylindre droit est le maximum maximorum.*

II. *La même partie de la surface totale étant donnée, et la forme de la base étant préscrite, le volume du prisme est un maximum, lorsque le prisme est droit, et que la base est équivalente à la moitié de la surface totale.*

Ces deux cas résultent immédiatement des théorèmes précédents, pourvu que l'on regarde ce prisme comme la moitié d'un autre prisme, lequel est divisé en deux parties égales par la base non-donnée, de manière que l'autre moitié se trouve au-dessous de ce plan.

36. I. *Etant donnée la surface totale d'un prisme de* n *côtés, à l'exception d'une seule face latérale, son volume est un maximum, lorsque le prisme est la moitié d'un prisme droit et régulier, lequel est divisé en deux parties égales par la face non-donnée, et que la base est un sixième de la partie préscrite de la surface.*

II. *La forme de la base étant donnée, et les autres conditions restant les mêmes, le prisme est un maximum, lorsqu'il est droit, et que la base est un sixième de la partie préscrite de la surface.*

37. I. *Etant donnée la surface d'un prisme de* n *côtés, à l'exception d'une base et d'une face latérale, le prisme est un maximum lorsqu'il est la moitié d'un prisme droit et régulier, lequel est divisé en deux parties égales par la face latérale non-donnée, et que la base est un tiers de la partie préscrite de la surface.*

II. *Lorsqu'aux conditions énoncées on ajoute encore celle, que la base soit donnée quant à la forme, le prisme est un maximum, lorsqu'il est droit et que la base est un tiers de la partie préscrite de la surface.*

On peut encore déduire de ce qui précède quelques autres propositions du même genre. Nous citons comme exemple la suivante:

III. *Etant préscrite la forme de la base d'un prisme, et étant donnée la somme de la base et d'une face latérale, le prisme est un maximum lorsque la face latérale en question est perpendiculaire à la base, et deux fois plus grande que celle-ci.*

Dans ce cas il n'est par nécessaire que les autres faces latérales soient perpendiculaires à la base, c'est à dire que le prisme soit droit.

38. Que l'on se représente une colonne prismatique indéfinie quelconque.

1°. Lorsqu'on coupe cette colonne par des plans quelconques non-parallèles aux arètes, les figures d'intersection sont des triangles *A, B, C,* .... dont les centres de gravité *a, b, c,* .... se trouvent tous dans une certaine droite *Q* parallèle aux arètes de la colonne.

2° Lorsqu'on fixe deux de ces sections, p. e. *A* et *B*, on obtient un corps prismatique dont le volume est mesuré par le produit de l'une des deux bases (*A* ou *B*) par la perpendiculaire abaissée sur elle du centre de gravité (*b* ou *a*) de l'autre base.*) De là on peut déduire que:

3°. Lorsque l'une des deux bases, p. e. *A*, est fixée, et que l'autre, *B*, se meut arbitrairement autour du point *b*, lequel restera toujours centre de gravité du triangle variable *B*, le volume du corps est constant, car ni la base *A*, ni la perpendiculaire abaissée sur elle du point *b*, ne changent; et réciproquement: le volume du corps étant donné, il faut que la base *B* passe dans toutes ses positions différentes possibles par le même point fixe *b*, lequel sera toujours son centre de gravité. La base *B* et la perpendiculaire abaissée sur elle du point *a* changent simultanément de grandeur, mais en sens inverse; la perpendiculaire est un maximum lorsqu'elle se con-

*) Cette propriété est énoncée ordinairement de la manière suivante: Le volume est égal au produit de l'une des bases par le tiers de la somme des perpendiculaires, abaissées sur elle des trois sommets de l'autre base; mais la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de cette base est égal au tiers de la somme des trois autres perpendiculaires.

fond avec la droite ab, il faut donc que la base B devienne un minimum lorsqu'elle est perpendiculaire à la droite Q et aux arètes de la colonne.

39. Des propriétés énoncées pour la colonne triangulaire (38) on parvient successivement à des propriétés analogues pour les colonnes qui ont 4, 5, 6, ... n faces, le cylindre y compris; ces propriétés peuvent être énoncées de la manière suivante:

1°. *Une colonne prismatique indéfinie quelconque (le cylindre y compris) étant coupée par des plans quelconques non-parallèles aux arètes, le lieu des centres de gravité* a, b, c, ... *de toutes ces figures d'intersection* A, B, C, ..., *est une droite fixe* Q, *parallèle aux arètes.*

2°. *Le volume de la partie de cette colonne limitée par deux de ces plans* A *et* B *est égal au produit de l'une ou de l'autre des deux bases* (A *et* B) *par la perpendiculaire abaissée sur elle du centre de gravité* (b *ou* a) *de l'autre base. — Lorsque les deux bases* A *et* B *se rencontrent dans l'intérieur de la colonne, le corps se compose de deux parties dont il faut regarder l'une comme négative; si dans cette supposition les deux centres de gravité* a *et* b *se confondent, les deux parties sont équivalentes en volume; le volume du corps entier sera donc* = 0, *comme la perpendiculaire est* = 0.

3°. *Lorsque l'une des deux bases* A *reste fixe, tandis que l'autre tourne arbitrairement autour de son centre de gravité* b *(lequel reste toujours son centre de gravité), le volume du corps est constant. Si c'est au contraire le volume du corps et la base fixe* A *(ou seulement son centre de gravité* a*) qui sont donnés, la position et la grandeur de l'autre base* B *restent indéterminées, mais dans toutes ses positions cette base passe par le point* b, *qui est toujours son centre de gravité. L'aire de cette base* B *est un minimum lorsqu'elle est perpendiculaire aux arètes de la colonne; c'est à dire: de tous les plans qui coupent la colonne donnée, celui qui est perpendiculaire à l'arète forme une figure d'intersection dont l'aire est un minimum. Plus le plan s'écarte de cette position, plus l'aire de cette figure devient grande.*

La colonne et le volume du corps limité latéralement par cette colonne étant donnés, on pourrait demander les conditions sous lesquelles la surface totale ou la surface latérale devient un minimum. — La réponse résulte des considérations suivantes:

Les centres de gravité des contours de toutes les coupes perpendiculaires se trouvent dans la droite q *) qui est parallèle aux arêtes (et à la droite Q). Soient α et β les points d'intersection de cette droite avec deux bases arbitraires A et B; désignons par P le contour de la section perpendiculaire; la surface latérale sera $= \alpha\beta . P$. Lorsque les bases A et B tournent arbitrairement autour des points fixes α et β, la surface latérale est constante: elle se compose de deux parties dont l'une doit être regardée comme négative, lorsque A et B se rencontrent dans l'intérieur de la colonne, et elle devient $= 0$, lorsque α et β se confondent. Dans tous ces cas le volume du corps peut grandir ou diminuer à volonté, comme la distance des points a et b dans lesquels A et B rencontrent la droite Q est arbitraire. Si au contraire les points a et b sont fixes, et que par conséquent le volume soit constant, il est évident que la surface latérale peut prendre *chaque grandeur voulue*, selon la grandeur de la ligne $\alpha\beta$. Lorsqu'en particulier les droites Q et q se confondent, et que les bases A et B passent par deux points fixes a et b (ou α et β) de ces lignes, le volume reste constant de même que la surface latérale, quelle que soit la position des bases. — Mais Q et q se confonderont entre autres dans les cas suivants: 1) lorsque la colonne est régulière, c'est à dire lorsque la section perpendiculaire aux arêtes (et à Q) est un polygone régulier; 2) lorsque Q est un axe central de la colonne, c'est à dire lorsque chaque section est un polygone qui a un centre (et par conséquent un nombre pair de côtés). Le cylindre élliptique présente un exemple du second cas.

Si en particulier les plans d'intersection (les bases A et B) sont parallèles, on déduit encore les propositions suivantes:

4°. *Etant données la colonne prismatique et la distance des plans d'intersection parallèles, le volume du corps prismatique est un minimum, lorsque ces plans sont perpendiculaires aux arêtes de la colonne.*

---

*) Pour chaque système de sections parallèles les centres de gravité des contours se trouvent dans une droite parallèle aux arètes de la colonne; mais cette droite change en même tems que la direction des sections; la propriété en question n'a par conséquent pas lieu pour des sections arbitraires non-parallèles. De là il résulte que la proposition énoncée par *M. Hirsch* dans son ouvrage: „Sammlung geometrischer Aufgaben" Vol. II, pg. 216, §. 163. n° 4, n'a pas en général lieu, de même que plusieurs autres propositions du même ouvrage relatives aux surfaces des corps et basées sur la proposition indiquée; p. e. les propositions des §. 163, n° 5. 6; §. 164; §. 191; §. 192. La proposition du §. 175 est exacte, bien qu'elle résulte d'un principe qui ne l'est pas. Les propositions des §. 176 et §. 177 ne sont pas assez clairement énoncées pour qu'on puisse dire si elles sont exactes ou non.

5°. *La colonne étant circonscrite à un sphère, et les bases* A *et* B *devant toucher également cette sphère, le corps est un minimum sous les mêmes conditions.*

6°. *De tous les prismes de* n *côtés circonscrits à une sphère, celui que est droit et régulier a le plus petit volume, la plus petite surface totale, la plus petite surface latérale et la plus petite base.* Enfin:

7°. *Si l'on égale* n *successivement à* 3, 4, 5 ...., *les prismes correspondants vont en diminuant, autant par rapport à leur volume, que par rapport à la surface latérale, la surface totale et la base; de manière que de tous les prismes circonscrits à la sphère c'est le cylindre droit qui est un minimum minimorum par rapport au volume, à la base, à la surface latérale et à la surface totale.*

Des corps pyramidaux.

40. I. *La base d'une pyramide étant circonscrite à un cercle et donnée, et la hauteur (ou le volume) de la pyramide étant également donnée, la somme des faces latérales est un minimum, lorsque la pyramide est circonscrite à un cône droit.*

Si au lieu de la hauteur (ou du volume) c'est la somme des faces latérales qui est donnée, la hauteur (ou le volume) sera sous les mêmes conditions un maximum. Dans la suite nous allons passer sous silence la plupart des inversions de ce genre.

Démonstration. Désignons par B la base donnée, et par C le cercle inscrit. Que l'on se représente au-dessus de C le cône droit K qui ait la hauteur préscrite, et au-dessus de B la pyramide circonscrite, dont nous désignons les faces latérales respectivement par α, β, γ, ... Que l'on se représente encore un second côue k, qui coupe le premier orthogonalement en C, et qui par conséquent se trouve de l'autre côte de la base; nommons chacun de ces deux cônes *cône polaire* de l'autre cône; désignons le côté du cône k par r. Que l'on se représente encore une pyramide p circonscrite à k, qui ait B pour base, ses faces latérales touchent la surface de k en des lignes qui sont respectivement perpendiculaires aux faces latérales α, β, γ, ... de P. Le corps composé des deux pyramides P et p peut être regardé comme la somme des pyramides triangulaires qui ont respectivement les faces latérales α, β, γ, ... de P pour bases, et le

sommet de p (ou de k) pour sommet, les hauteurs de ces pyramides sont par conséquent toutes $= r$. On a donc:

$$P + p = \tfrac{1}{3} r(\alpha + \beta + \gamma + \dots).$$

Soit P_1 une troisième pyramide construite sur la base B, du même côté que P, et de même hauteur (donc aussi de même volume) que P; P_1 et p forment un corps qui peut être regardé également comme la somme des pyramides triangulaires qui ont respectivement les faces latérales α_1, β_1, γ_1, ... de P_1 pour bases, et le sommet de p pour sommet: les hauteurs de ces pyramides seront en général plus petites que r, et ce n'est que dans des cas particuliers que l'une ou deux de ces faces peuvent être $= r$; désignons ces hauteurs respectivement par $r - z$, $r - y$, $r - x$,..., et nous aurons:

$$\begin{aligned} P_1 + p &= \tfrac{1}{3}(r - z)\alpha_1 + \tfrac{1}{3}(r - y)\beta_1 + \tfrac{1}{3}(r - x)\gamma_1 + \dots \\ &= \tfrac{1}{3} r(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \dots) - \tfrac{1}{3}(z\alpha_1 + y\beta_1 + x\gamma_1 + \dots), \end{aligned}$$

donc, comme $P_1 = P$, on aura

$$r(\alpha + \beta + \gamma + \dots) = r(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \dots) - (z\alpha_1 + y\beta_1 + x\gamma_1 + \dots),$$

ce dont on conclut que

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots < \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \dots$$

c'est à dire que la somme des faces latérales de P est un minimum.

II. Le cône K pouvant être regardé comme limite de la pyramide P, pourvu que l'on regarde le nombre des faces latérales comme infiniment grand, et leurs bases (c'est à dire les côtés de B) comme infiniment petites, la proposition énoncée a également lieu pour le cône; savoir:

De tous les cônes construits au-dessus du même cercle comme base, et de hauteur (de volume) donné, le cône droit a la plus petite surface latérale.

41. I. *Lorsque les bases* B *et* B_1 *de deux pyramides respectivement circonscrites à des cercles sont données, et que la somme de leurs volumes est donnée, la somme de leurs faces laterales réunies ne peut être un minimum qu'autant que* 1° *les pyramides sont circonscrites à des cônes droits* K *et* K_1, *et que* 2° *les cônes polaires* K *et* K_1 *correspondants respectivement aux cônes* k *et* k_1 (40) *ont respectivement des côtés égaux* $\mathrm{r} = \mathrm{r}_1$.

La démonstration de cette proposition, qui est tout à fait analogue à celle pour les figures planes (13), ne présente aucune difficulté, pourvu que l'on ait égard à la proposition précédente (40).

Ce théorème a encore lieu par rapport au cône, pourvu que les bases données soient des cercles; encore peut-on l'étendre immédiatement à un nombre quelconque de corps pyramidaux; on aura donc la proposition suivante:

II. *Etant données les bases d'un nombre quelconque de pyramides, ces bases étant toutes ou des cercles ou circonscrites à des cercles; étant donnée en outre la somme des faces latérales de toutes ces pyramides réunies: la somme des volumes de ces pyramides ne peut être un maximum, qu'autant que* 1° *toutes ces pyramides sont ou circonscrites à des cônes droits, ou elles-mêmes des cônes droits, et que* 2° *les cônes polaires correspondants à ces cônes ont tous des côtés égaux.*

Il existe un cas particulier de la première proposition (I.) qui mérite d'être signalé, c'est celui, où les deux pyramides sont construites sur la même base, mais dans des sens opposés, de manière à former une pyramide double. On a par rapport à ce cas la proposition suivante:

III. *Etant donnée la base d'une pyramide double, et cette base étant circonscrite à un cercle; étant donnée en outre la surface de cette pyramide double: son volume est un maximum lorsqu'elle est circonscrite à un cône double droit et symétrique, et que par conséquent elle est symétrique elle-même, c'est à dire que les deux pyramides dont elle se compose sont symétriquement égales.*

42. I. *Etant données deux cathètes de deux triangles rectangles (une cathète de chaque triangle), et la somme des deux autres cathètes, la somme des hypoténuses est un minimum, lorsque les triangles sont semblables.*

Soient AB et DE ou a et c (*fig.* 12.) les cathètes données, et soit BE la somme donnée des deux autres cathètes b et d; comme les points A et D et la ligne BE sont fixes, la somme des hypoténuses $x+y$ sera un minimum, si l'angle $\alpha=\beta$, ce qui entraîne la similitude des triangles ABC et DEC.

II. De la similitude des triangles on déduit:

$$(\alpha) \qquad a:b:x = c:d:y.$$

Supposons que:

$$(\beta) \quad \begin{cases} ma = m_1 a_1, & mc = n_1 c_1, \\ mb = m_1 b_1, & md = n_1 d_1, \\ mx = m_1 x_1, & my = n_1 y_1, \end{cases}$$

m, m_1 et n_1 désignant des droites données quelconques la grandeur de a,

et c_1 est déterminée par ces équations; il n'en est pas de même pour b_1 et c_1 qui ne sont pas déterminés séparément, et à l'égard desquels nous savons seulement que la somme $m_1 b_1 + n_1 d_1$ est égale à la somme constante et donnée $m(b+d)$. Pour ce qui est de z_1 et y_1 nous observons que la somme $m_1 z_1 + n_1 y_1$ devient un maximum ou un minimum en même tems que $z+y$, propriété qui résulte de l'équation $m_1 z_1 + n_1 y_1 = m(z+y)$.

Mais comme en vertu des équation (α) et (β) on a les proportions

$$(\gamma) \quad a_1 : b_1 : z_1 = c_1 : d_1 : y_1 = a : b : z = c : d : y,$$

on peut regarder a_1, b_1, z_1 et c_1, d_1, y_1, comme les côtés de deux triangles rectangles semblables entre eux, et semblables aux triangles rectangles formés par a, b, et z, et par c, d, y. On a donc la proposition plus générale suivante:

Etant données deux cathètes a_1 *et* c_1 *de deux triangles rectangles (un cathète de chaque triangle), et la somme des deux rectangles* $b_1 m_1$ *et* $d_1 n_1$, *formés par les deux autres cathètes* b_1 *et* d_1, *et les droites données* m_1 *et* n_1: *la somme des rectangles formés par les deux hypoténuses* z_1 *et* y_1 *et les mêmes droites* m_1 *et* n_1 *est un minimum lorsque les triangles sont semblables.*

On voit aisément que ce théorème peut être étendu au cas où les deux triangles ont à la place des angles droits B_1 et E_1, deux angles donnés quelconques. Il n'y a alors qu'une seule condition à remplir, c'est que les angles α_1 et γ_1, respectivement opposés à a_1 et c_1 soient égaux.

III. Cette proposition peut être étendue immédiatement à un plus grand nombre de triangles de la manière suivante:

Etant données les cathètes a, c, e, ... *d'un nombre quelconque de triangles rectangles (une cathète de chaque triangle); étant donnée en outre la somme des rectangles des autres cathètes* b, d, f, ... *avec les droites données* m, n, o, ..., *c'est à dire la somme* $\beta = mb + nd + of + \ldots$; *la somme des rectangles des hypoténuses* z, y, x, ... *avec les mêmes droites données, c'est à dire la somme* $\mu = mz + ny + ox + \ldots$, *est un maximum, lorsque tous les triangles sont semblables.*

Lorsqu'en particulier les cathètes données sont égales entre elles, c'est à dire $a = c = e \ldots$, *les triangles sont tous égaux, et on a:* $b = d = f = \ldots$, *et* $z = y = x \ldots$; *le minimum* μ *a alors une valeur constante quel que soit le nombre des triangles, pourvu que les valeurs de* a, β *et* $\sigma = m + n + o + \ldots$ *ne varient pas.*

Car la valeur de b est déterminée par l'équation $\beta = b\sigma$, et la valeur de z est déterminée par a et b, de manière que $\mu = z\sigma$ a une valeur constante.

43. *Lorsque de deux pyramides qui ont des hauteurs égales et des bases équivalentes et isopérimétriques l'une est circonscrite à un cône droit, sa surface latérale est plus petite que celle de l'autre pyramide, si celle-ci n'est pas circonscrite à un cône droit. Si au contraire les deux pyramides sont circonscrites à des cônes droits, leurs surfaces latérales sont équivalentes, les cônes sont par conséquent égaux.* — Enfin: *Les pyramides circonscrites au même cône droit qui ont ou des bases équivalentes ou des bases isopérimétriques ont des surfaces latérales équivalentes.*

Désignons la hauteur de l'une des pyramides en question par a, sa base par β, les côtés de la base par $m, n, o, \ldots$, le périmètre $m+n+o+\ldots$ par σ, les perpendiculaires abaissées du pied de la perpendiculaire a sur les côtés de la base par $b, d, f, \ldots$, les hauteurs des faces latérales par $z, y, x, \ldots$ et la surface latérale par μ: la verité de la proposition découlera sans difficulté du troisième cas de la proposition précédente (42, III).

Ce théorème et le lemme précédent sont dûs à *Lhuilier*, seulement il les énonce sous une forme un peu différente.

44. *De toutes les pyramides de* n *côtés qui ont même hauteur, c'est la pyramide régulière qui a la plus petite surface latérale, les bases étant équivalentes, et la plus grande base, par conséquent aussi le plus grand volume, les surfaces latérales étant équivalentes. — De toutes les pyramides de* n *côtés de bases et de surfaces latérales équivalentes, c'est la pyramide régulière qui a la plus grande hauteur et le plus grand volume.* Etc.

La démonstration ne présente aucune difficulté.

45. *De deux pyramides circonscrites à des cônes droits et ayant des hauteurs égales et des bases équivalentes, celle dont la base est circonscrite au plus petit cercle a la plus grande surface latérale.*

Soient P et P_1 les deux pyramides, μ et μ_1 leurs surfaces latérales, et soit P la pyramide dont la base est circonscrite au plus grand cercle. Que l'on abaisse des centres des cercles inscrits aux bases des perpendiculaires p et p_1 sur les faces latérales, on aura évidemment $p > p_1$; mais

comme $P = \frac{1}{3}p\mu$, $P_1 = \frac{1}{3}p_1\mu_1$ et d'après l'hypothèse $P = P_1$, il s'ensuivra que $\mu < \mu_1$.

46. ***Parmi les pyramides régulières de même hauteur et de base équivalente celle dont la base a le plus grand nombre de côtés a la surface latérale la plus petite; la surface du cône droit sera donc un minimum*** **(45). Ou bien:** ***Parmi tous les corps pyramidaux de même hauteur, le cône droit a la propriété d'avoir une surface latérale minima minimarum, le volume étant de grandeur préscrite; et un volume (une base) maximum maximorum, la surface étant de grandeur préscrite.*** **Etc.**

47. I. ***De tous les tétraèdres dont les surfaces totales sont équivalentes, le tétraèdre régulier a le plus grand volume; et de tous les tétraèdres équivalents en volume il a la plus petite surface totale.***

Car il faut que le corps soit une pyramide regulière par rapport à chacune des quatre faces regardées comme base (44); il faut donc que les quatre faces soient régulières, et que par conséquent le corps lui-même soit régulier.

On aurait aussi pu rattacher la démonstration à la première proposition sur les pyramides (40). Car en regardant ce corps comme une pyramide, et une de ses faces comme base, il faut qu'il soit circonscrit à un cône droit, et que les trois faces latérales forment des angles égaux avec la base; d'où l'on conclut que les six angles dièdres sont égaux, que par conséquent les quatre angles trièdres sont réguliers et égaux, et que les quatre faces sont régulières et égales.

II. Nous énonçons encore les propriétés suivantes du tétraèdre régulier, dont nous tirerons parti par la suite.

Lorsqu'on regarde une de ses faces comme base, on a les rapports suivants:

1°. La base est un quart de la surface totale, ou un tiers de la surface latérale.

2°. La hauteur l d'une surface latérale, ou le côté du cône droit inscrit à la pyramide est trois fois plus grande que le rayon r du cercle inscrit à la base; on a donc $l = 3r$.

3°. Le diamètre d du cercle mentionné est à la hauteur h de la pyramide comme $1 : \sqrt{2}$, c'est à dire comme le côté d'un quarré est à sa diagonale; car on a $h^2 = l^2 - r^2 = 8r^2 = 2d^2$, donc $d : h = 1 : \sqrt{2}$.

4°. La sphère inscrite touche chaque face dans son centre de gravité, et le centre de gravité de la sphère coïncide avec celui de la pyra-

mide. La hauteur de la pyramide est donc égale au double du diamètre δ, ou égale au quadruple du rayon ϱ de la sphère inscrite; on aura donc $h = 2\delta = 4\varrho$; puis $\delta : d = 1 : \sqrt{2}$, et par conséquent $h : d = d : \delta$ ou $d^2 = h\delta$; etc.

48. Comme dans des pyramides quelconques circonscrites au même cône droit, les volumes, les surfaces totales, les surfaces latérales et les bases sont respectivement comme les périmètres des bases, on déduit des propriétés énumérées (47) du tétraèdre les propositions suivantes:

I. *La base d'une pyramide circonscriptible à un cercle étant donnée quant à sa forme, et la surface totale étant donnée également: le volume est un maximum, lorsque la pyramide est circonscrite à un cône droit, et que la base est un quart de la surface;* etc.

II. *Parmi les pyramides de* n *côtés de surface totale équivalente, celle-là est un maximum qui est régulière et dont la base est égale à un tiers de la surface latérale, ou bien celle dont toutes les faces sont touchées dans leur centre de gravité par la sphère inscrite; (cette sphère a le centre de gravité de la pyramide pour centre, et son diamètre est égal à la moitié de la hauteur de la pyramide).*

III. *Lorsqu'on substitue au nombre* n *des côtés successivement les valeurs* 3, 4, 5, ..., *les volumes des pyramides maxima correspondantes vont toujours en croissant, et l'on parvient par là au résultat suivant:*

Parmi toutes les pyramides (les cônes y compris), le cône droit dont la base est égale à un quart de la surface totale a les deux propriétés: d'être un maximum maximorum par rapport à son volume, la grandeur de la surface étant donnée; et d'être un minimum minimorum par rapport à la surface, la grandeur du volume étant donnée. — Pour ce cône particulier tous les rapports énoncés (47, II.) pour les grandeurs l, r, d, h, ϱ et δ ont encore lieu, de même que la propriété que son centre de gravité et le centre de la sphère inscrite se confondent, et que cette sphère touche les côtés du cône dans un point dont la distance au sommet est égale à $\frac{3}{4}$ du côté entier, ou bien que la sphère touche les éléments de la surface latérale dans leur centre de gravité.

IV. *Parmi toutes les pyramides de* n *côtés de surface équivalente (ou de volume équivalent) qui sont circonscrites à des sphères, celle dont le volume est un maximum (ou celle dont la surface totale*

est un minimum), c'est à dire celle qui est régulière et dont la base est un quart de la surface totale, est circonscrite à la plus grande sphère. — Si l'on substitue successivement à n *les valeurs* 3, 4, 5, ..., *les surfaces données (ou bien les volumes donnés) restant constantes, les sphères maxima correspondantes grandissent continuellement, et celle qui correspond au cône est par conséquent un maximum maximorum.*

Désignons par P le volume de la pyramide, par S sa surface, et par ϱ le rayon de la sphère inscrite, on aura l'équation $P = \frac{1}{3}\varrho S$, d'où l'on déduit que, S étant donné, la plus grande valeur de ϱ correspond à la plus grande valeur de P; et P étant donné, la plus grande valeur de ϱ correspond à la plus petite valeur de S.

V. *Parmi toutes les pyramides de* n *côtés, circonscrites à la même sphère, celle qui est régulière et dont la base est un quart de la surface totale, a le plus petit volume et la plus petite surface.* (IV.) — *Si l'on substitue à* n *successivement les valeurs* 3, 4, 5, ..., *les pyramides minima correspondantes vont toujours en diminuant, autant par rapport à leur volume, qu'à leur surface totale, pourvu que la sphère reste la même. Il en résulte donc que: Parmi toutes les pyramides circonscrites à une sphère donnée (les cônes y compris), le cône dont la hauteur est égale au double du diamètre de la sphère est un minimum minimorum, autant par rapport au volume, que par rapport à la surface.* Car toutes les pyramides minima (le cône y compris) ont la même hauteur $h = 2\delta$, et leurs bases sont circonscrites à des cercles égaux, $d = \delta\sqrt{2}$, etc.

49. *Etant donnée la base d'une pyramide triangulaire quant à sa forme, étant donnée encore la somme de cette base et d'une face latérale, et y étant ajoutée la condition que les deux autres faces soient perpendiculaires à la base, la pyramide est un maximum, lorsque la base est un quart de la somme donnée.*

Cette proposition découle du n° 47, de la même maniere que le n° 33 découlait du n° 31.

50. *Etant donnée la base* β *d'une pyramide de* n *côtés quant à sa forme, étant donnée en outre la somme de sa base et d'une face latérale* α, *la pyramide est un maximum, lorsque la base est un tiers de cette somme donnée* ($\alpha = 2\beta$), *et que cette face latérale est perpendiculaire à la base.*

Cette proposition peut être déduite du n° 37, III.

51. Pour trouver les propriétés de la pyramide de n côtés qui a le plus grand volume, la surface latérale étant donnée, ou la plus petite surface latérale, le volume étant donné, on peut partir, comme nous l'avons fait (47), de la pyramide triangulaire, et étendre ces propriétés à toutes les autres pyramides.

Rappelons d'abord que d'après ce qui a été dit (44), une pyramide de n côtés de surface latérale donnée ne peut avoir un volume maximum qu'autant qu'elle est régulière. Dans les recherches qui vont suivre, il ne sera donc question que de pyramides régulières.

Pour la pyramide triangulaire la solution de notre problème résulte directement d'une proposition énoncée plus haut sur les prismes quadrilatéraux, sans que l'on soit obligé à avoir recours à l'observation que nous venons de faire. On peut l'énoncer de la manière suivante:

52. I. *La somme des trois faces latérales d'une pyramide triangulaire étant donnée, son volume est un maximum lorsqu'elle est régulière et que l'angle trièdre au sommet est droit; c'est à dire lorsque les faces latérales sont des triangles rectangles isocèles, lesquels par conséquent sont perpendiculaires les uns aux autres.*

Que l'on construise un parallélépipède dont un des angles trièdres soit égal à l'angle trièdre au sommet de la pyramide en question, et dont les trois arètes soient respectivement égales au trois arètes latérales de la pyramide; la somme des trois faces latérales de la pyramide sera égal à un quart de la surface totale du parallélépipède, et le volume de la pyramide sera égal à un sixième du volume du parallélépipède. Comme le volume d'un parallélépipède de surface donnée est un maximum lorsque le parallélépipede est un cube (30), la pyramide ne peut être un maximum, qu'autant que les conditions énoncées sont remplies.

II. Enonçons encore les propriétés suivantes des pyramides régulières dont la base est un triangle équilatéral, et dont les faces latérales sont des triangles rectangles isoscèles:

1°. La hauteur l des faces latérales (le côté du cône droit inscrit) est au rayon r du cercle inscrit à la base comme $\sqrt{3}:1$, c'est à dire comme la hauteur du triangle isocèle est à la moitié du côté. Le même rapport a lieu pour la somme des trois faces latérales et la base.

2°. La hauteur h de la pyramide est au rayon mentionné r comme $\sqrt{2}:1$; la hauteur de la pyramide h est à la hauteur des faces latérales l comme $\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

3°. Les perpendiculaires abaissées du centre du cercle mentionné sur les faces latérales sont égales entre elles, $= \varrho$; les pieds de ces perpendiculaires sont les centres de gravité des faces latérales; la sphère qui a le centre de la base pour centre et ϱ pour rayon, touche donc les faces latérales dans leur centre de gravité. Il existe partant entre le rayon ϱ de cette sphère et les grandeurs l, r, h les rapports suivants: $\varrho : l = \sqrt{2} : 3$; $\varrho : r = \sqrt{2} : \sqrt{3}$; $\varrho : h = 1 : \sqrt{3}$, ou bien $\delta : h = 2 : \sqrt{3}$, c'est à dire: le diamètre δ de la sphère est à la hauteur h de la pyramide, comme le côté d'un triangle équilatéral est à sa hauteur.

53. On établira maintenant sans difficulté les théorèmes suivants:

I. *La base d'une pyramide étant circonscriptible à un cercle et de forme donnée, étant donnée en outre la surface latérale, la pyramide est un maximum lorsqu'elle est circonscrite à un cône droit et que la base est à la surface latérale comme* $1 : \sqrt{3}$, *ou que le rayon* r *du cercle inscrit à la base est à la hauteur* h *de la pyramide comme* $1 : \sqrt{2}$; *etc.*

II. *Etant données la base d'une pyramide triangulaire quant à sa forme, et une des faces latérales quant à sa grandeur, et étant ajoutée la condition que les deux autres faces latérales soient perpendiculaires à la base, la pyramide est un maximum lorsque la base est à la face latérale donnée comme* $1 : \sqrt{3}$.

III. *Etant donnée la surface latérale d'une pyramide de* n *côtes, son volume sera un maximum, lorsque la base est à la surface latérale comme* $1 : \sqrt{3}$; *ou bien* $\mathrm{r} : \mathrm{h} = 1 : \sqrt{2}$; *ou bien encore lorsque toutes les faces latérales sont touchées dans leur centre de gravité par une sphère dont le centre se trouve dans le centre de gravité de la base.*

IV. *Lorsqu'on égale* n *successivement à* 3, 4, 5, ..., *le volume des plus grandes pyramides va toujours en croissant, et de toutes les pyramides de surface équivalente (le cône y compris) c'est le cône droit dont la hauteur* h *est au rayon* r *de la base comme* $\sqrt{2} : 1$ *(c'est à dire celui dont la base est à la surface latérale comme* $1 : \sqrt{3}$*) qui est le maximum maximorum. Ce cône a encore la propriété que tous les éléments de la surface latérale sont touchés dans leur centre de gravité (ou bien que tous ses côtés sont touchés en un point dont la distance au sommet est égale à* $\frac{2}{3}$ *du côté entier) par une sphère concentrique à la base; etc.*

54. En combinant ces propositions (53) avec celles du n° 41, III. on parviendra aux propositions suivantes:

I. *Etant donnée la surface latérale d'une pyramide double, étant donné en outre la forme de la base qui se trouve au milieu de la pyramide double, et qui soit circonscriptible à un cercle, la pyramide double est un maximum, lorsque les deux pyramides simples dont elle se compose sont symétriquement égales et remplissent les conditions énoncées dans la proposition précédente* (53, I). Cette pyramide double est donc un cône double, droit et symétrique, circonscrit à une sphère.

II. *Etant donnés un angle dièdre d'une pyramide triangulaire, le rapport des deux faces* α *et* β *qui comprennent cet angle, et la somme des deux autres faces* γ *et* δ, *le volume de la pyramide sera un maximum, lorsque les faces* α *et* β *sont des triangles isocèles qui ont l'arête* h *de l'angle dièdre qu'elles comprennent pour base commune, que les faces* γ *et* δ *sont égales entre elles, et que la droite* r *qui est perpendiculaire à l'arête* h *et à l'arête opposée à* h, *est à l'arête* h *comme* $1:\sqrt{8}$.

III. *Etant donnée la surface d'une pyramide double de* n *côtés, son volume sera un maximum, lorsqu'elle est circonscrite à une sphère qui touche chacune des faces dans son centre de gravité; ou bien lorsqu'elle est regulière et symétrique et que son axe* h *est au diamètre* δ *de la sphère inscrite comme* $\sqrt{3}:1$; etc.

IV. *Lorsqu'on substitue a* n *successivement les valeurs* 3, 4, 5, …., *la surface restant la même, les volumes des plus grandes pyramides correspondantes vont toujours en croissant, de manière que le cône double représente un maximum maximorum.*

Remarque. La pyramide double est un cas particulier de la classe des corps qui sont limités par un nombre pair $2n$ de triangles, et qui ont deux angles polyèdres de n arètes opposés l'un à l'autre, et entre ces deux angles polyèdres n angles trièdres. Les arètes qui joignent les angles trièdres forment un polygone de n côtés, lequel est en général gauche, mais qui est plan dans la pyramide double. Les théoremes de III. et IV. ont lieu encore par rapport à la classe entière; c'est à dire: la surface d'un de ces corps étant donnée, son volume est un maximum, lorsqu'il prend la forme de la pyramide double décrite. D'autres considérations (66 et suivants) qui se fondent sur le principe de symétrie, prouveront, qu'il faut qu'il prenne cette forme.

Il en résulte en particulier que:

Parmi tous les corps de sa classe l'octoèdre régulier a le plus

grand volume, la surface étant donnée, et la plus petite surface, le volume étant donné.

55. Que l'on se représente un angle polyèdre convexe quelconque de n arêtes (un espace pyramidal illimité) dont le sommet soit S. Chaque plan qui rencontre toutes les arêtes limite avec les faces de l'angle polyèdre une pyramide et peut être regardé comme la base β de cette pyramide. Si l'on meut ce plan parallèlement à lui-même, la base et le volume de cette pyramide croissent ou décroissent continuellement entre les limites 0 et ∞, selon que le plan s'éloigne ou s'approche du point S. Pour se faire une idée des différentes directions possibles de β, on n'a qu'à se figurer un plan α qui passe par le sommet S, sans cependant passer par l'intérieur de l'angle polyèdre; l'ensemble de toutes les positions de α détermine toutes les directions que β peut avoir, car β peut toujours être regardé comme parallèle à l'une des directions de α. Dans chacune de ces différentes directions possibles la pyramide limitée par β peut avoir chaque grandeur préscrite.

Ce que nous venons d'énoncer par rapport à l'angle polyèdre s'applique également à l'espace conique. Le même a lieu par rapport aux propositions suivantes:

56. *Parmi toutes les pyramides limitées latéralement par les faces d'un angle polyèdre* S *et qui ont pour base un plan qui passe par le point* P *situé dans l'intérieur de l'angle* S, *la pyramide dont la base a le point* P *pour centre de gravité est un maximum.*

Démonstration. Que l'on se représente, pour fixer les idées, par RST (*fig.* 13) l'angle polyèdre donné S, et par AB la base β qui a le point P pour centre de gravité; par AA_1BB_1 une colonne prismatique construite au-dessus de AB, ou β, dont les arêtes soient parallèles à la ligne SP. (Du reste il suffit déjà de construire le corps prismatique au-dessus de AB de manière que le point S se trouve dans son intérieur.) Soit CD une autre base quelconque dont le plan forme avec la colonne prismatique la figure EF, les parties cunéiformes APE et BPF de la colonne prismatique comprises entre AB et EF sont équivalentes en volume (39, 2°); il faut donc que les parties APC et BPD de l'angle S comprises entre les bases AB et CD soient de volume différent; et comme évidemment la partie $APC > APE$, et $BPD < BPF$, il faut que $APC > BPD$ et par conséquent $CSD > ASP$.

57. *Parmi toutes les pyramides équivalentes en volume limitées latéralement par les faces du même angle polyèdre* S, *celle dont la hauteur* SP *passe par le centre de gravité* P *de la base* β *a la plus petite base.*

Car chaque plan qui passe par le centre de gravité P de la base β est la base d'une pyramide $S\beta_1$ qui est plus petite que $S\beta$ (56), et dont la hauteur est plus petite que SP, c'est à dire plus petite que la hauteur de $S\beta$. Soit $S\alpha$ une des pyramides dont il est question dans notre proposition, donc $S\alpha = S\beta$, on n'à qu'à supposer β_1 parallèle à α, et on aura, comme $S\beta_1 > S\beta$, $S\beta_1 > S\alpha$; β_1 est donc plus éloigné de S que α (55) et la hauteur de $S\beta$ sera à plus forte raison plus grande que la hauteur de $S\alpha$; il faut donc que l'on ait $\beta < \alpha$.

58. *De toutes les pyramides limitées latéralement par les faces d'un angle polyèdre* S *et à bases équivalentes, celle qui remplit les conditions énoncées* (57) *est un maximum.*

59. *De toutes les pyramides de même hauteur limitées latéralement par les faces du même angle polyèdre* S, *celle qui remplit les conditions énoncées* (57) *est un minimum.*

60. *L'angle polyèdre au sommet d'une pyramide de* n *côtés étant circonscrit à un cône droit et étant donné:*

1°. *la pyramide aura respectivement une surface latérale minima ou un volume maximum, lorsque l'axe du cône passe par le centre de gravité de la base de la pyramide; selon que le volume ou la surface latérale de la pyramide est donné.*

2°. *la pyramide aura respectivement une surface totale minima ou un volume maximum lorsque la sphère inscrite touche la base dans son centre de gravité; selon que le volume ou la surface totale de la pyramide est donné.*

Pour la pyramide triangulaire ces deux propositions ont toujours lieu, puisque l'angle polyèdre au sommet est toujours circonscrit à un cône droit.

61. *Etant donnée dans l'intérieur de l'angle polyèdre* S *une surface courbe continuement convexe* F *dont le côté concave est tourné vers le sommet* S, *et étant ajoutée la condition que la base* β *de la pyramide limitée latéralement par les faces de l'angle* S *touche la surface* F, *la pyramide est un minimum, lorsque le point de contact est le centre de gravité de la base.* — Si en particulier la surface F est une partie de la

surface de la sphère dont le centre se trouve au sommet *S*, cette proposition se confond avec celle du n° 59.

La démonstration de ces propositions (58, 59, 60 et 61) se rattache à celle des propositions précédentes.

62. *Les bases de toutes les pyramides équivalentes en volume, limitées latéralement par les faces du même angle polyèdre* S, *touchent toutes une certaine surface courbe* F; *les points de contact sont en même tems les centres de gravité des bases respectives; l'angle polyèdre est asymptotique par rapport à la surface* F. — Nous observons en particulier que:

1°. *L'angle* S *étant trièdre, et ses arètes étant prises pour axes des coordonnées, l'équation de la surface* F *est:*

$$xyz = A,$$

ce dont il résulte que la surface contient trois systèmes de sections coniques; etc.

2°. *L'angle* C *étant un cône du second degré, la surface* F *est un hyperboloïde à deux nappes.*

3°. *Une surface donnée du second degré étant coupée par des plans dirigés de manière à former avec les parties correspondantes de la surface des segments équivalents en volume, les bases* β *de ces segments sont touchées dans leur centre de gravité par une autre surface du second degré qui est semblable à la première, semblablement placée et concentrique* *).

63. On peut établir les comparaisons suivantes entre les prismes, les pyramides et les pyramides doubles construites de manière à avoir les propriétés du maximum ou du minimum:

Remarquons d'abord que:

En désignant l'aire d'un polygone régulier de n côtés par b, et le rayon du cercle inscrit par r, on a

$$b = r^2 n \tang \frac{\pi}{n} = r^2 m.$$

Pour $n = \infty$ (pour le cercle) on a $m = n \tang \frac{\pi}{n} = \pi$, et $b = r^2 \pi$.

I. Etant donné un prisme tel que le volume est un maximum, la surface étant donnée, et que la surface est un minimum, le volume étant

*) Il reste à établir un théorème analogue sur des surfaces courbes quelconques; savoir: Lorsqu'on retranche d'une surface courbe quelconque au moyen de plans des segments de volume constant, examiner quelle est la surface qui touche les bases de tous les segments, quels sont les points dans lesquels elle les touche, et quelles sont ses autres propriétés.

donné (32, I.); soit v le volume, s la surface totale, b la base, n le nombre des côtés de la base, r le rayon du cercle inscrit à la base, h la hauteur du prisme et ϱ le rayon de la sphère inscrite au prisme, on a:

$$1^\circ.\quad r=\varrho=\tfrac{1}{2}h;\quad s=6b=6r^2m=6\varrho^2m;$$

et comme $v=\frac{1}{3}\varrho s$, on a encore:

$$2^\circ.\quad v=2\varrho^3m=\frac{\sqrt{s^3}}{3\sqrt{(6m)}};\quad \frac{(\sqrt{s})^3}{v}=3\sqrt{(6m)}.$$

II. Etant donnée une pyramide dont le volume soit un maximum lorsque la surface est donnée, et dont la surface soit un minimum lorsque le volume est donné (48, II.); soit v_1 le volume, s_1 la surface totale, b_1 la base, n le nombre des côtés de la base, r_1 le rayon du cercle inscrit à la base, h_1 la hauteur de la pyramide et ϱ_1 le rayon de la sphère inscrite, on a (47, II. et 48, II.):

$$1^\circ.\quad \varrho_1=\tfrac{1}{4}h_1;\quad h_1^2=8r_1^2;\quad s_1=4b_1=4r_1^2m=8\varrho_1^2m;$$

et comme $v_1=\frac{1}{3}\varrho_1 s_1$, on a encore:

$$2^\circ.\quad v_1=\tfrac{8}{3}\varrho_1^3m=\frac{\sqrt{s_1^3}}{6\sqrt{(2m)}};\quad \frac{(\sqrt{s_1})^3}{v_1}=6\sqrt{(2m)}.$$

III. Etant donnée une pyramide double qui remplisse les conditions énoncées au n° 54, III; désignons par v_2, s_2, b_2, n, r_2, h_2 et ϱ_2 des grandeurs analogues à celles de II; on a (52 et 54):

$$1^\circ.\quad 2r_2^2=3\varrho_2^2;\quad s_2=2b_2\sqrt{3}=2\sqrt{3}\,r^2m=\varrho_2^2.3m\sqrt{3};$$

et comme $v_2=\frac{1}{3}\varrho_2 s_2$, on a encore:

$$2^\circ.\quad v_2=\varrho_2^3.m\sqrt{3}=\frac{\sqrt{s_2^3}}{3\sqrt{((3m)\sqrt{3})}};\quad \frac{(\sqrt{s_2})^3}{v_2}=3\sqrt{((3m)\sqrt{3})}.$$

IV. Dans ces trois cas (I, II, III) la formule (2°) exprime la dépendance entre la surface totale, le volume et le rayon de la sphère inscrite des corps respectifs; c'est à dire elle fournit le moyen de déduire chacune de ces trois grandeurs des deux autres. Les expressions $(\sqrt{s})^3$, $(\sqrt{s_1})^3$, $(\sqrt{s_2})^3$ désignent des cubes dont les bases sont équivalentes aux surfaces données s, s_1, s_2; les nombres $3\sqrt{(6m)}$, $6\sqrt{(2m)}$, $3\sqrt{((3m)\sqrt{3})}$ expriment le rapport entre ces cubes et les corps respectifs.

Lorsque l'on regarde les nombres n et $m\left(=n\,\text{tang}\,\frac{\pi}{n}\right)$ comme égaux dans les trois cas, il résulte des formules énoncées la relation suivante:

$$\frac{(\sqrt{s_1})^3}{v_1}:\frac{(\sqrt{s})^3}{v}=\left(\frac{(\sqrt{s})^3}{v}\right)^2:\left(\frac{(\sqrt{s_2})^3}{v_2}\right)^2,\quad \text{ou}\quad \left(\frac{(\sqrt{s})^3}{v}\right)^3=\frac{(\sqrt{s_1})^3}{v_1}.\left(\frac{(\sqrt{s_2})^3}{v_2}\right)^2.$$



Lorsqu'on égale les volumes de ces corps, $v = v_1 = v_2$, on a:

$$s_1 : s = s^2 : s_2^2 \quad \text{ou} \quad s^3 = s_1 s_2^2;$$

$$s_1 : s = \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{3} \quad \text{et} \quad s : s_2 = \sqrt[6]{4} : \sqrt[6]{3}, \quad \text{ou}$$

$$s_1^6 : s^6 : s_2^6 = 64 : 36 : 27;$$

on a encore:

$$\varrho_1 : \varrho = \varrho^2 : \varrho_2^2 \quad \text{ou} \quad \varrho^3 = \varrho_1 \varrho_2^2;$$

$$\varrho_1 : \varrho = \sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad \varrho : \varrho_2 = \sqrt[6]{3} : \sqrt[6]{4}, \quad \text{ou}$$

$$\varrho_1^6 : \varrho^6 : \varrho_2^6 = 27 : 48 : 64.$$

Lorsqu'on égale les surfaces, $s = s_1 = s_2$, on a:

$$v_1 : v = v^2 : v_2^2 \quad \text{et} \quad \varrho_1 : \varrho = \varrho^2 : \varrho_2^2;$$

$$v_1^4 : v^4 : v_2^4 = \varrho_1^4 : \varrho^4 : \varrho_2^4 = 27 : 48 : 64.$$

Lorsqu'enfin on égale les rayons des sphères inscrites, $\varrho = \varrho_1 = \varrho_2$, on a:

$$v_1 : v = v^2 : v_2^2 \quad \text{et} \quad s_1 : s = s^2 : s_2^2;$$

$$v_1^2 : v^2 : v_2^2 = s_1^2 : s^2 : s_2^2 = 64 : 36 : 27.$$

Du nombre des corps par rapport auxquels ces relations ont lieu, nous citons les suivants qui se présentent fréquemment: 1° l'hexaèdre, la pyramide quadrilatérale et l'octaèdre; 2° le cylindre, le cône et le cône double.

Remarque générale.

64. Les propositions énoncées sur les corps prismatiques et pyramidaux ne doivent être regardées que comme un commencement des recherches sur les polyèdres en général. Même par rapport à ces deux espèces de corps il y a encore beaucoup de questions à résoudre. Je veux en indiquer quelques unes, et ajouter pour plusieurs d'entre elles les conjectures que j'ai formées à leur égard.

I. Comment peut-on démontrer, que le prisme de n côtés, décrit au n° **32, I.**, est plus grand que tout autre polyèdre de la même espèce (c'est à dire que tout polyèdre limité par deux polygones de n côtés opposés l'un à l'autre, et par n quadrilatères), la surface étant donnée? — Démontrer p. e. 1° que le prisme triangulaire qui satisfait aux conditions (32, I.) est plus grand qu'une pyramide triangulaire quelconque tronquée obliquement, dont la surface est équivalente à celle du prisme; 2° que le cube est plus grand que tout autre corps limité par six quadrilatères de surface équivalente.

II. *Sous quelles conditions un polyèdres convexe, déterminé quant à son espèce, et de surface donnée, est-il un maximum?*

Dans les propositions sur le prisme, la pyramide et la pyramide double (32, 48, II. 54, III.) qui ne donnent que des cas particuliers de cette question génerale, j'ai fait ressortir à dessin la propriété que:

Le plus grand de ces polyèdres est circonscrit à une sphère qui touche toutes ses faces dans leur centre de gravité.

Il s'agirait maintenant d'examiner, *si cette propriété convient généralement à tous les polyèdres convexes, ou quelle est la classe de polyèdres auxquels elle convient.*

Il n'y a pas de doute que le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers sont des maxima parmi les corps qui sont respectivement de la même espèce et qui ont des surfaces totales équivalentes; remarquons que ces deux corps ont la propriété énoncée ci-dessus.

Observons encore que les propositions des n° 57, 58, 59 et 60, nous engagent à supposer cette propriété, puisque le polyèdre peut être décomposé en pyramides dont les sommets sont réunis au centre de la sphère, et dont les bases sont les faces du polyèdre.

III. Nous citons comme des cas simples, subordonnés au problème général (II.), les suivants, par lesquels on pourrait commencer:

1°. Le corps en question est de la même espèce qu'un prisme coupé en pyramide des deux côtés; c'est à dire: il se compose de deux angles polyèdres formés de n faces triangulaires, opposés l'un à l'autre; entre ces triangles se trouve une zône formée de n quadrilatères; ou plus généralement encore il se trouve plusieurs zônes entre ces triangles, toutes formées de n quadrilatères.

2°. Le corps est formé de deux faces de n côtés, opposées l'une à l'autre, entre lesquelles se trouvent deux (ou un autre nombre quelconque de) zônes formées chacune par n quadrilatères.

3°. Le corps est de la même espèce qu'une pyramide tronquée de n côtés (31), et sa surface est donnée, à l'exception d'une des bases. — Fesons ressortir le cas particulier où la base est un quarré ou un cercle. — Au lieu d'avoir une base supérieure, le corps est coupé en pyramide, et la surface donnée consiste par conséquent de n triangles (au sommet) et de n quadrilatères; etc.

4°. Le corps donné est une pyramide de n côtés, et la surface

est donnée à l'exception d'une des faces latérales. — On démontre aisément que les faces, à l'exception de celle qui n'est pas donnée, ont des angles égaux au sommet. — On discutera en premier lieu la pyramide quadrilatérale. Si la propriété mentionnée ci-dessus (II.) est générale, cette pyramide sera la moitié d'une pyramide hexagonale qui aura la propriété indiquée.

IV. 1°. La base d'une pyramide étant donnée quant à sa forme et à sa grandeur (mais n'étant pas circonscriptible à un cercle) et la surface totale étant donnée, quelles sont les conditions sous lesquelles le volume est un maximum?

2°. La même question lorsque la base n'est donnée que quant à sa forme (31), et que la surface totale est donnée.

3°. La même question lorsque la base est donnée quant à sa forme, et que la surface latérale est donnée.

On satisfait au premier cas (1°) par une pyramide telle que toute droite D tirée par le sommet parallèlement à la base, forme par sa direction des angles α, β, γ, ... avec les côtés a, b, c, ... de la base, qui satisfont à l'équation:

$$a \sin\alpha \cos\alpha_1 + b \sin\beta \cos\beta_1 + c \sin\gamma \cos\gamma_1 + \ldots. = 0,$$

α_1, β_1, γ_1, ... désignant respectivement les angles que les faces latérales correspondantes forment avec la base.

V. 1°. Etant donné dans l'espace un polygone rectiligne gauche P, qui doit être regardé comme limite de la surface latérale d'un angle polyèdre: déterminer la position du sommet S de cet angle polyèdre de manière que la surface devienne un minimum.

2°. Le même problême, lorsqu'au lieu d'un polygone P une courbe quelconque à double courbure est donnée.

Dans le premier cas (1°) on résoudra le problème en satisfesant aux conditions suivantes.

Soient a, b, c, ... les côtés du polygone P; soient α, β, γ, ... les angles formés respectivement par ces côtés et par la direction d'une droite D menée par le sommet S; soient enfin α_1, β_1, γ_1, ... les angles formés par des plans menés par la droite D parallèlement aux côtés a, b, c, ..., et par les faces latérales correspondantes de l'angle polyèdre; il faudra pour résoudre le problème que l'équation

$$a \sin\alpha \cos\alpha_1 + b \sin\beta \cos\beta_1 + c \sin\gamma \cos\gamma_1 + \ldots. = 0$$

ait lieu pour toutes les directions possibles de la droite D.

Il s'agit de savoir si la condition exprimée par cette équation est générale; c'est à dire si pour que la surface latérale soit un minimum il faut que cette équation ait lieu.

On sait que la recherche de la plus petite surface entre des limites données présente des difficultés que les géomètres n'ont pas encore réussi de surmonter. C'est là la raison qui m'a engagé à poser le problème précédent; car j'espérais parvenir de cette manière à de nouveaux éléments de la surface mentionnée; car en prenant p. e. quatre points très-rapprochés l'un de l'autre dans la surface, et en les regardant comme sommets d'un quadrilatère gauche, le point S du problème (1°) peut être regardé comme un cinquième point de cette surface. Cependant la formule énoncée paraît trop compliquée pour se prêter à la solution.

VI. Etant donnée la base d'une pyramide quant à sa forme et à sa grandeur, étant donnée en outre la hauteur de la pyramide: quelles sont les conditions sous lesquelles l'angle polyèdre au sommet est un maximum? — (Ces conditions sont-elles les mêmes que celles des n° 57, 58 et 59?)

Des corps en général, et de la sphère en particulier.

Le problème principal à discuter ici, savoir:

„*Lequel de tous les corps de même surface a le plus grand volume,*
„*ou lequel a la plus petite surface, les volumes étant équivalents*
„*entre eux?*"

peut être résolu géométriquement, et entre autres des deux manières suivantes.

Première méthode.

Théorème fondamental.

65. I. *Une pyramide triangulaire quelconque* abcd (*fig.* 14) *est divisée en deux parties équivalentes en volume par le plan qui passe par une des arêtes* cd *et par le milieu* m *de l'arête opposée à* ab; *ajoutons encore que la figure d'intersection* cdm *est plus petite que la moitié de la somme des deux faces* acd *et* bcd *qui ne sont pas coupées.*

II. *Une pyramide quadrilatérale* abfed (*fig.* 14) *dont la base est un trapèze* abfe, *est divisée en deux parties équivalentes en volume par le plan qui passe par le sommet* d *et les milieux* m *et* n *des côtés paral-*

lèles ab *et* ef *de la base; ajoutons encore que la figure d'intersection* dmn *est plus petite que la moitié de la somme des deux faces* aed *et* bfd *qui ne sont pas coupées.*

III. *Un prisme triangulaire tronqué* aegbfh (*fig.* 14) *est divisé en deux parties équivalentes en volume par un plan mené par les milieux* m, n *et* o *des arêtes latérales* ab, ef *et* gh; *ajoutons encore que la figure d'intersection* mno *est en général plus petite que la moitié de la somme des deux bases* aeg *et* bfh. — Lorsqu'en particulier les bases sont parallèles, *mno* est égal à la moitié de la somme des deux bases.

Démonstration. Cas I. Que l'on projette les triangles *acd* et *bcd* sur le plan du triangle *mcd;* soient a_1 et b_1 les projections des sommets *a* et *b;* les points a_1, *m* et b_1 se trouvent en une ligne droite, et on aura $ma_1 = mb_1$; d'où résulte que le triangle $mcd = \frac{1}{2}(a_1cd + b_1cd)$. Mais comme $acd > a_1cd$ et $bcd > b_1cd$, il s'ensuit que $mcd > \frac{1}{2}(acd + bcd)$, ce qui est conforme à la proposition.

Cas II. Comme *ef* est parallèle à *ab,* les triangles *aed, mnd* et *bfd* sont entre eux comme les triangles *acd, mcd* et *bcd;* la vérité de ce cas résulte donc du cas précédent.

Cas III. Comme *gh* est parallèle à *ef* et *ab,* ce cas résulte également du cas précédent.

66. *Lorsqu'il existe dans un corps limité par une surface courbe quelconque une direction dans laquelle toutes les droites ne rencontrent la surface qu'en deux points, les milieux de toutes ces droites forment une surface* γ *qui divise le corps en deux parties équivalentes en volume et qui est elle-même plus petite que la moitié de la surface totale.**)

*) On peut tirer de ce théorème une conséquence qui se rapporte à la plus petite surface entre des limites données, savoir:

Entre des limites données il ne peut y avoir en général qu'une seule surface qui soit un minimum.

Car supposons qu'il y en ait deux, α et β, et que $\alpha > \beta$, il existera (d'après la construction qui résulte de notre théorème, pourvu que l'on choisisse convenablement la direction des droites) entre α et β une troisième surface γ telle que $2\gamma < \alpha + \beta$, et par conséquent $\gamma < \alpha$; puis il y aura entre α et γ une surface δ telle que $2\delta < \alpha + \gamma$, et par conséquent $\delta < \alpha$; ensuite il y aura entre α et δ une surface ε plus petite que α, et ainsi de suite. Mais ces surfaces γ, δ, ε, ... se rapprochent de plus en plus de la surface α: on parviendra donc à des surfaces qui s'en rapprochent indéfiniment et qui malgré cela sont plus petites qu'elle; il s'ensuit que α n'est pas un minimum. — Si l'on supposait $\alpha = \beta$, on prouverait par des raisonnements semblables que α ne peut pas être un minimum.

Car en rapprochant ces droites indéfiniment les unes des autres, les parties du corps comprises entre trois de ces droites quelconques les plus voisines peuvent être regardées comme des prismes triangulaires auquel le théorème précédent (65, III.) peut s'appliquer; ce dont le théorème présent est une conséquence.

67. *Parmi tous les corps de même surface la sphère a le plus grand volume, et parmi tous les corps du même volume elle a la plus petite surface.*

Démonstration. Que l'on se représente un corps qui ait la propriété d'être le plus grand en volume de tous les corps de même surface; il existera évidemment dans toutes les directions un plan qui divise la surface en deux partie équivalentes.

Soit A un plan pareil, et soient α et β les moitiés de la surface. Si le corps n'était pas divisé par ce plan en deux parties équivalentes en volume, si p. e. $\alpha A > \beta A$, il ne pourrait pas avoir un volume maximum; car on pourrait toujours supposer β symétriquement égal à α, et l'on aurait $\beta A = \alpha A$, le corps aurait par conséquent grandi. Il faut donc que βA soit $= \alpha A$. Si dans cette supposition β n'était pas symetriquement égal à α, on n'aurait qu'à se représenter du même côté de A que β une surface α_1 symétriquement égale à α, et l'on aurait $\alpha_1 A = \alpha A = \beta A$, et le corps $\alpha\alpha_1 = \alpha\beta$. Que l'on mène dans les espaces compris entre β et α_1 des droites parallèles entre elles, limitées par ces surfaces, leurs milieux se trouvent dans une troisième surface γ, qui a la même base que β et α_1, et l'on a $\gamma A = \beta A = \alpha_1 A$, ou $\gamma\alpha = \beta\alpha$, mais en même tems $2\gamma < \beta + \alpha_1$, ou $\gamma < \beta$ (comme $\beta = \alpha_1$) (66); la surface γ qui est plus petite que β limiterait donc avec α un espace équivalent en volume à celui qui se trouve entre β et α, ce qui est contraire à l'hypothèse; il faut donc que β soit symétriquement égal à α, et le corps supposé a la propriété d'être divisé en deux parties symétriquement égales par tout plan qui divise la surface (et le volume) en deux parties équivalentes.

Soient A et B deux plans quelconques qui divisent la surface du corps en parties équivalentes, et qui forment entre eux un angle φ incommensurable avec π; on démontre sans difficulté qu'il existe une infinite d'autres plans C, D, ... qui passent par la ligne d'intersection a de A et B, et qui ont la même propriété que ces plans; il faut donc que chaque plan A_1 perpendiculaire à a qui rencontre le corps, le coupe en un cercle (26).

Mais comme la droite *a* peut avoir une direction quelconque, le corps est coupé par un plan quelconque en un cercle; ce dont on conclut que c'est une sphère.

Remarque. On aurait pu suivre une autre marche pour la démonstration de la proposition précédente. On n'a qu'à considérer d'abord le corps limité par deux plans *A* et *B* de grandeur indéterminée qui se coupent sous un angle préscrit φ, et par une surface α indéterminée quant à sa forme, mais de grandeur préscrite. Par un raisonnement tant soit peu analogue à celui dont on a fait usage dans la quatrième méthode pour des figures planes (20), on trouve que le corps est un maximum lorsqu'il est un secteur cunéïforme de la sphère, c'est à dire lorsque *A* et *B* sont deux demi-grand-cercles, et que α est le fuseau sphérique qu'ils comprennent.

En égalant ensuite l'angle φ à π, on passe à la demi-sphère; et ainsi de suite.

Seconde méthode.

Théorème fondamental.

68. I. *Etant donnée une arête* ab *d'une pyramide triangulaire* abcd (*fig.* 14), *et étant ajoutée la condition que cette arête et les deux sommets* c *et* d *qui ne se trouvent pas dans l'arête* ab *aient respectivement pour lieu les trois droites parallèles* P, Q *et* R, *les aires des faces* abd *et* abc *adjacentes à l'arête et le volume de la pyramide sont constants, quelle que soit la position des trois éléments* c, d *et* ab. *La somme des deux autres faces* acd *et* bcd *devient un minimum, lorsque le plan* dcm *ou* X *qui passe par les deux sommets* d *et* c *et par le milieu* m *de l'arête donnée, est perpendiculaire aux droites fixes, ou que la pyramide est symétrique par rapport à ce plan* X.

II. *Etant donnés deux côtés parallèles* ab *et* ef *de la base d'une pyramide quadrilatérale* abfed (*fig.* 14), *étant ajoutée la condition que ces deux droites et le sommet* d *de la pyramide soient respectivement situés dans trois droites parallèles et fixes* P, S *et* R, *les aires des trois faces* adb, abfe *et* edf *adjacentes aux arêtes données, et le volume de la pyramide sont constants, quelle que soit la position de ces trois éléments dans les droites fixes. La somme des deux faces* aed *et* bdf *construites au-dessus des côtés non-donnés* (ae *et* bf) *de la base est un minimum, lorsque le plan* dmn (X) *qui passe par le sommet* d *et les milieux* m *et*

n *des côtés donnés est perpendiculaire aux droites fixes, où que la pyramide est symétrique par rapport au plan* X.

III. *Etant données les trois arêtes latérales* ab, ef, gh *d'un prisme triangulaire* aegbfh (*fig.* 13) *tronqué obliquement ou parallèlement, et étant ajoutée la condition que ces arêtes latérales soient respectivement situées dans trois droites parallèles et fixes* P, S, T, *les aires des trois faces latérales et le volume du prisme sont constants, quelle que soit la position de ces trois arêtes dans les droites fixes. — La somme des deux bases* aeg *et* bfh *sera un minimum, lorsque le plan* mno = X *qui passe par les milieux* m, n *et* o *de ces trois arêtes est perpendiculaire à ces arêtes, c'est à dire lorsque le prisme est symétrique par rapport à ce plan.*

IV. *La même propriété peut s'étendre à tous les prismes polygonaux, le cylindre y compris, savoir: Les arêtes* P, S, T, U, ... *d'une colonne prismatique quelconque étant fixes, et trois arêtes latérales quelconques d'un prisme limité latéralement par cette colonne étant données, p. e. les arêtes* ab, ef *et* gh *situées respectivement en* P, S *et* T, *les autres arêtes latérales et le volume du prisme sont constants, quelle que soit la position des trois arêtes en* P, S *et* T. *La somme des deux bases* aed... *et* bfh... *est un minimum, lorsque le plan* X *qui passe par les milieux* m, n, o, ... *des arêtes latérales est perpendiculaire à ces arêtes, et que par conséquent le corps est symétrique par rapport à ce plan.*

Démonstration. Cas I. Construisons une pyramide telle que le théorème l'exige, c'est à dire telle que le plan dcm ou X soit perpendiculaire aux droites P, Q, R; les perpendiculaires ax et bx érigées dans les sommets a et b sur les faces acd et bcd se rencontreront dans un point x du plan X, et on aura $ax = bx = r$. La pyramide en question peut être exprimée par les quatre pyramides qui ont pour sommet le point x, et dont les bases sont les quatre faces latérales de la pyramide en question, de la manière suivante:

$$abcd = xacd + xbcd - xabc - xabd \text{ *)}.$$

Regardons la position de l'arête ab comme fixe, et fesons glisser les sommets c et d sur les droites Q et R; désignons les dans une nou-

*) Si les angles égaux acd et bcd étaient obtus, il faudrait mettre $+xabc$ au lieu de $-xabc$, etc.

velle position quelconque par c_1 et d_1, et nous aurons pour la pyramide abc_1d_1 les expressions analogues:

$$abc_1d_1 = xac_1d_1 + xbc_1d_1 - xabc_1 - xabd_1.$$

Mais comme la première, la quatrième et la cinquième de ces pyramides sont respectivement équivalentes en volume aux pyramides correspondantes de la première équation, on en déduit:

$$xacd + xbcd = xac_1d_1 + xbc_1d_1.$$

Ces deux couples de pyramides ont pour bases les faces (acd et bcd, ac_1d_1 et bc_1d_1) dont nous voulions comparer la grandeur. Les deux premières pyramides ont des hauteurs égales, savoir $ax = bx = r$, les hauteurs des deux autres pyramides sont évidemment plus petites, car leurs bases ac_1d_1 et bc_1d_1 ne sont pas perpendiculaires aux droites fixes xa et xb; désignons les par $r-\alpha$ et $r-\beta$; alors la dernière équation peut être mise sous la forme:

$$r.acd + r.bcd = (r-\alpha).ac_1d_1 + (r-\beta).bc_1d_1,$$

d'où vient:

$$r(ac_1d_1 + bc_1d_1 - acd - bcd) = \alpha.ac_1d_1 + \beta.bc_1d_1,$$

par conséquent:

$$ac_1d_1 + bc_1d_1 > acd + bcd:$$

résultat conforme à la proposition énoncée.

Les cas II, III et IV se rattachent très-simplement au premier cas, comme on verra à la seule inspection de la figure; de même qu'au n° 65.

69. A l'aide du théorème fondamental précédent un corps convexe quelconque peut être transformé en un autre corps équivalent en volume, de surface plus petite, et symétrique par rapport à un certain plan X. La transformation s'effectue par un procédé analogue à celui qui a été exposé dans la cinquième méthode pour les figures planes (23).

Soit donné un polyèdre convexe K. Que l'on fasse passer par ses sommets des droites indéfinies P, Q, R, S, ... perpendiculaires à un plan quelconque X. Que l'on fasse glisser la partie de chacune de ces droites qui est comprise dans le corps, sur cette droite, jusqu'à ce qu'elle soit symétrique par rapport à X, c'est à dire jusqu'à ce que son point de milieu se trouve en X. Que l'on fasse passer des deux côtés de X des plans par les points extrêmes de ces droites symétriques, de manière qu'entre trois points quelconques les plus voisins il y ait un triangle plan, et on obtiendra un nouveau polyèdre K_1, lequel (comme on conclut du théorème

précédent (n° 68) est équivalent en volume au polyèdre K, et a un surface plus petite. Il est évident qu'en général le nombre des sommets et des faces de K_1 sera plus grand que celui de K, car chaque droite qui passe par l'intérieur de K augmentera le nombre des sommets d'une unité, et le nombre des surfaces au moins de *deux* unités, à la seule exception du cas où la droite en question passe par deux sommets. — D'après cette construction on pourrait supposer que toutes les faces de K_1 sont des triangles; observons donc que deux ou un plus grand nombre de ces faces peuvent être situées dans le même plan, et se réunir par là en un polygone de quatre, ou même d'un plus grand nombre de côtés.

Par le même procédé le polyèdre K_1 peut être transformé à l'aide d'un nouveau plan arbitraire Y en un autre polyèdre K_2, équivalent en volume, de surface plus petite, d'un nombre plus grand de sommets et de faces, et symétrique par rapport au plan Y. Ce polyèdre K_2 peut être transformé en un autre polyèdre K_3, équivalent en volume, de surface plus petite, d'un nombre plus grand de sommets et de faces, et symétrique par rapport à un nouveau plan Z; et ainsi de suite.

Si en particulier le second plan Y est perpendiculaire au premier plan X, le troisième polygone K_2 est symétrique par rapport aux deux plans à la fois; il a donc l'intersection z des deux plans pour axe de symétrie; c'est à dire, chaque droite ab perpendiculaire à z, qui rencontre la surface du corps dans les points a et b, est divisée par l'axe z en deux parties égales. Si le troisième plan Z est perpendiculaire aux deux plans X et Y, ou bien à l'axe z, le quatrième polyèdre K_3 est symétrique par rapport aux trois plans à la fois; il a donc les trois lignes d'intersection z, y, x de ces trois plans pour axes de symétrie, et leur point d'intersection C pour centre. Si l'on continue encore la transformation du polyèdre K_3, chacun des nouveaux polyèdres K_4, K_5, ... a un centre.

Comme par ces transformations réitérées le nombre des sommets et celui des faces augmentent et que l'aire de la surface totale diminue toujours, toutes les faces peuvent devenir très petites, et la surface totale s'approche indéfiniment d'une surface courbe. Réciproquement on peut regarder la surface d'un corps quelconque K à surface courbe et convexe, comme composée d'éléments plans infiniment petits; le corps K peut par conséquent être transformé en un autre corps symétrique K_1, équivalent en volume et de plus petite surface; etc.

Quelle que soit donc la surface d'un corps convexe donné K (qu'elle soit une seule surface courbe, qu'elle soit composée de faces planes ou qu'elle soit composée en partie de faces planes et en partie de faces courbes): on peut le transformer en un autre corps de volume équivalent et de surface plus petite, tant que ce n'est pas un corps qui a des plans de symétrie dans toutes les directions possibles. Mais dès que les transformations ont mené a une pareille forme, c'est à dire dès que le corps obtenu a des plans de symétrie dans toutes les directions possibles, toute transformation ultérieure cesse, c'est a dire le corps reste constant par rapport à la forme et la grandeur *). Mais un pareil corps, qui a des plans de symétrie dans toutes les directions, a aussi des axes de symétrie dans toutes les directions, et un centre C dans lequel tous ces axes et tous ces plans se rencontrent; de là il résulte que tous ses diamètres sont égaux, c'est à dire que toutes les figures d'intersection avec des plans sont des cercles. Il n'existe donc qu'un seul corps pareil, c'est la *sphère.*

70. Des considérations précédentes (69) on déduit d'abord le théorème principal suivant:

Parmi tous les corps équivalents en volume la sphère a la plus petite surface; et parmi tous les corps de même surface elle a le plus grand volume.

La démonstration de ce théorème est évidemment contenue dans ce qui précède.

71. Ensuite on peut encore en déduire des conséquences par rapport aux corps qui sont soumis à des conditions restrictives, comme p. e. par rapport à ceux qui doivent être situés entre des limites données; etc. Nous citons comme exemples les corps prismatiques et les corps pyrami-

*) Choisissons pour exemple l'ellipsoïde K. On peut donner à ce corps par deux transformations consécutives la forme en question, c'est à dire la forme sphérique. Soient a, b, c ses demi-axes. Que l'on se représente la sphère S, concentrique avec K, et ayant pour rayon $r=\sqrt[3]{(abc)}$: les surfaces des deux corps se rencontreront en une courbe L, et toutes les droites CP menées du centre C à un point quelconque P de la courbe L seront $=r$. Que l'on fasse passer par le point C le plan auxiliaire X perpendiculaire au rayon CP, et que l'on transforme K par rapport à X; on obtiendra un nouveau corps K_1, qui sera également un ellipsoïde, et qui aura la droite $PC=r$ pour demi-axe. Le plan X et les surfaces S et K_1 ont en tout quatre points communs Q. Que l'on fasse passer par le point C le plan auxiliaire Y, perpendiculaire à une des quatre lignes $CQ(=r)$, et que l'on transforme K_1: le nouveau corps K_2 sera une sphère qui aura les propriétés énoncées. — Il est aisé de verifier l'exactitude de ce procédé.

daux de hauteur préscrite et de volume donné ou de surface donnée. Pour ces exemples il faut ajouter par rapport aux transformations indiquées (69) les restrictions, que les plans auxiliaires X, Y, Z, ... soient perpendiculaires à la base. On parvient alors de nouveau aux théorèmes déjà établis du n° 29, III et du n° 44.

Ces considérations servent encore à constater ce qui a été dit plus haut (54, Remarque) par rapport à l'espèce des corps dont la pyramide double fait partie. Car on n'a qu'à tirer dans un corps pareil K la diagonale principale, c'est à dire la droite entre les sommets des deux angles polyèdres de n côtés, et à prendre un plan auxiliaire X perpendiculaire à ce plan, le nouveau corps K_1 sera une pyramide double symétrique de la même espèce.

72. Il se présente ici, comme au n° 26 la question suivante:

Quelle est la forme qu'un corps peut avoir qui a 1° deux plans de symétrie donnés, ou 2° qui en a trois?

Lorsque le corps a deux plans de symétrie X et Y qui forment entre eux l'angle α, et que *premièrement* α et π sont commensurables, et p. e. $\alpha:\pi = 1:m$, le corps a en tout m plans de symétrie qui se rencontrent tous en une droite z. Les figures d'intersection de ces m plans avec la surface, et les parties dans lesquelles cette surface est divisée sont égales entre elles et se correspondent comme les m axes des figures planes et les segments de ces figures (26). La surface se compose de $2m$ parties ou égales ou symétriquement égales; du reste ces parties sont indéterminées. — Lorsque secondement α et π sont incommensurables, le nombre des plans de symétrie qui passent par la droite z est infiniment grand; leurs figures d'intersection avec la surface sont égales entre elles, et chacune est divisée par la droite z en deux parties symétriques; la surface est donc évidemment engendrée par la rotation d'une courbe autour de l'axe z.

II. Lorsque le corps a trois plans de symétrie X, Y, Z, qui se rencontrent en trois droites z, y, x, et qui forment entre eux les angles α, β, γ, et que deux de ces angles, p. e. α et β sont incommensurables avec π, le corps est engendré par rapport aux deux axes z et y par rotation; il est donc une sphère ou un système de sphères concentriques. Lorsque parmi ces trois angles il n'y a qu'un seul qui soit incommensurable avec π, ou lorsqu'il n'y a aucun qui ait cette propriété, il existera en gé-

néral parmi les trois systèmes de plans de symétrie (z), (y), (x), qui passent d'après le cas précédent (I.) par les droites z, y, x, deux couples de plans (les deux plans du même couple appartenant à deux systèmes différents) qui comprennent entre eux des angles incommensurables avec π; le corps est donc encore une sphère. Il n'y a qu'un très-petit nombre de cas qui font exception. *) On peut donc énoncer la proposition suivante:

Lorsqu'un corps a trois plans de symétrie qui se coupent en trois droites, il est en général une sphère, ou bien un système de sphères concentriques.

Conséquences du théorème fondamental n° 70.

73. Par des raisonnements analogues en partie à celles dont on a fait usage par rapport au théorème fondamental (n° 17) du premier mémoire on peut déduire du théorème présent une suite de conséquences sur les corps en général; cependant ces conséquences ne sont ni aussi générales ni aussi importantes que celles sur les figures planes et sphériques. Nous ne ferons donc qu'en signaler quelques unes en peu de mots.

I. *Parmi tous les corps* aα, *limités par une base plane* a *de grandeur arbitraire, et par une surface* α *arbitraire quant à la forme, mais donnée quant à la grandeur, la demi-sphère est un maximum.* — Citons comme cas particulier la proposition suivante: Parmi tous les segments de sphère de surface équivalente α, la demi-sphère et un maximum.

II. *Parmi tous les corps dont la surface se compose d'un cercle donné* a *et d'une surface arbitraire quant à sa forme mais de grandeur donnée, le segment sphérique est un maximum.*

III. *Parmi tous les corps limités par deux surfaces circulaires données* a *et* b, *et par une surface de grandeur donnée, la partie de sphère entre les deux surfaces circulaires* **) *est un maximum.* — Un

*) Ce sont les cas suivants:

1°. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\pi$ et γ arbitraire;
2°. $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ et $\beta = \gamma = \frac{1}{3}\pi$;
3°. $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = \frac{1}{3}\pi$ et $\gamma = \frac{1}{4}\pi$;
4°. $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = \frac{1}{3}\pi$ et $\gamma = \frac{1}{5}\pi$.

La discussion ultérieure de ces cas conduit à des résultats intéressants, que nous nous réservons pour une autre occasion.

**) Les dénominations de certaines parties de la sphère dont on fait usage ici, sont parfaitement analogues à celles qui ont été établies au n° 18 du premier Mémoire par rapport aux parties du cercle.

théorème analogue a lieu pour un nombre quelconque de surfaces circulaires *a, b, c, ... etc.*

IV. *Parmi tous les corps limités par deux plans qui forment entre eux un angle dièdre donné* S, *et par une surface de grandeur donnée* α, *celui-là est un maximum pour lequel* α *est une partie de la surface d'une sphère qui a son centre au sommet* S *de l'angle dièdre.* — Un théorème analogue a lieu, lorsqu'on remplace l'angle dièdre par un cône quelconque *S.*

V. *De deux secteurs sphériques acutangles* aα *et* bβ *de surface courbe équivalente* ($\alpha = \beta$), *celui qui a la plus petite base (qui est par conséquent pris dans la plus petite sphère) est plus grand que l'autre. Lorsqu'au contraire les secteurs sont obtusangles, celui dont la base est la plus grande (qui est par conséquent pris dans la plus grande sphère) est plus grand que l'autre.*

VI. *Parmi tous les corps de surface équivalente, limités latéralement par un cône droit donné* S, *et ayant pour base une surface quelconque* α *contenue tout à fait au-dedans du cône, celui-là est un maximum qui est une partie convexe de sphère entre le cône circonscrit (c'est à dire, le corps est un maximum, lorsque la base* α *est un segment d'une sphère inscrite au cône).* — *La partie concave de sphère entre le cône circonscrit est un minimum, lorsque, au lieu de la surface, la différence* S — α *entre la surface conique latérale* S *et la base* α *est donnée.* — *Etant données les conditions* 1° *que le corps soit limité par les surfaces latérales de deux cônes droits* S *et* S_1 *et par une autre surface arbitraire* α, 2° *que le corps soit compris entre ces surfaces coniques, et* 3° *que sa surface soit de grandeur donnée: le corps est un maximum, lorsqu'il est une partie convexe de sphère entre les cônes circonscrits* S *et* S_1 *etc.*

VII. *Les bases* a *et* b *de deux corps étant des cercles donnés, et la somme des autres parties de leurs surfaces* α *et* β *étant également donnée: la somme des volumes des deux corps est un maximum lorsque ces corps sont des segments de sphères égales, pourvu que le segment au-dessus de la plus petite base soit acutangle.* — *Les bases* a, b, c, ... *des corps* aα, bβ, cγ, ... *étant des cercles donnés, et la somme des autres parties de leurs surfaces* $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ *étant également donnée, la somme des volumes ne peut être un maximum, qu'autant que ces corps*

sont des segments de sphères égales. Par rapport au maximum principal il faut encore ajouter la condition, que seulement le segment au-dessus de la plus grande base soit obtusangle. —

Ou bien: *Les bases* a, b, c, ... *d'un nombre quelconque de segments sphériques étant données, et la somme de leurs surfaces courbes* α, β, γ, ... *étant également données: la somme de leurs volumes est en général un maximum ou un minimum chaque fois que les segments ont des rayons égaux etc.*

Remarque générale.

74. Par rapport aux corps en général il y a encore beaucoup de questions à discuter, qui présentent plus ou moins de difficultés. Nous n'en citons ici que les exemples suivants:

I. *Etant donné dans la proposition du* n° 73, VI. *au lieu du cône droit, un cône quelconque (ou d'abord un cône du second degré), ou un angle polyèdre quelconque: quelles sont les propriétés de la surface* α *pour le corps maximum?*

II. *Sous quelles conditions un corps, compris entre deux plans parallèles de distance donnée, et ayant une surface de grandeur donnée, est il un maximum?*

D'apres n° 69 et n° 71 il faut que le corps soit engendré par rotation autour d'un axe z perpendiculaire au plan donné; sa surface contiendra donc en général deux cercles situés dans ces plans; puis il faut, que le corps soit symétrique par rapport à un plan Z, parallèle aux deux plans donnés, et situé à égale distance de l'un et de l'autre; les deux cercles seront donc égaux; enfin il faut que les deux plans donnés touchent le reste de la surface dans les circonférences de ces deux cercles. —

Lorsque la surface donnée est plus petite que la surface de la sphère qui touche les deux plans, et que l'on doit remplir la condition que la surface du corps rencontre les deux plans (c'est à dire qu'un point ou qu'une partie de chacun des ces plans fasse partie de la surface du corps) le corps se compose d'une sphère et d'un cylindre (ou de deux cylindres) d'épaisseur infiniment petite situé entre la sphère et un des plans.

III. *La surface d'un corps se compose de deux parties* α *et* β *qui se rencontrent en un polygone gauche, fixe et rectiligne* P; *la surface* β *est polyédrique (ou courbe) et fixe; la surface* α, *qui est de gran-*

deur donnée est la surface latérale d'un angle polyèdre S: *trouver les conditions sous lesquelles ce corps est un maximum.*

Ou bien: *Lorsqu'au lieu de la grandeur de* α, *le volume du corps est donné, trouver la position du sommet* S *pour laquelle* α *est un minimum.* (Ces conditions se réduisent-elles à l'équation du n° 64, V. 2°.?)

Enfin: *Quelles sont les conditions lorsque le polygone* P *se transforme en une courbe à double courbure, et que l'angle* S *se transforme en un cône?*

IV. *La surface d'un corps se compose de deux parties* α *et* β; *l'une,* β, *est fixe, et l'autre,* α, *est déterminée quant à sa grandeur: trouver les conditions que* α *doit remplir pour que le corps soit un maximum.* Traiter les cas particuliers où β est une figure plane et notamment 1° une ellipse, 2° un quarré; etc.

Quelques uns des théorèmes et des problèmes de ce mémoire ont déjà été publiés autrefois par l'auteur dans le Journal pour les mathématiques de Mr. *Crelle.*

17.
Construction des regulären Siebenzehnecks.
(Vom Herrn Professor v. *Staudt* in Erlangen.)

Nachdem man im Kreise zwei zu einander senkrechte Durchmesser AB, CD gezogen und durch die Puncte P, A, C die Tangenten PS, AS, Cc gelegt hat, trage man auf der letzten die Stücke $Cc = 2AB$, $Ck = 8AB$ ab, so dafs Cc, Ck zu AB einstimmig parallel sind, und ziehe die Geraden Sc, Sk, von welchen die erstere den Durchmesser CD in d und die letztere den Umfang des Kreises in E und E_1 schneide. Wenn man nun die Puncte e, e_1 sucht, in welchen die Gerade SD von den Verlängerungen der Sehnen CE, CE_1 geschnitten wird, und alsdann die Geraden $eFdF_2$, $e_1F_1dF_3$ zieht, so sind dadurch auf dem Umfange des Kreises vier Puncte F, F_1, F_2, F_3 bestimmt. Es werde ferner die durch C gehende Tangente von den Geraden DF, DF_1, DF_2, DF_3 in den Puncten f, f_1, f_2, f_3 und die Gerade CD von den Geraden Sf, Sf_1, Sf_2, Sf_3 in den Puncten g, g_1, g_2, g_3 geschnitten, so werden die vier Geraden fg_1, f_1g_2, f_2g_3, f_3g den Umfang des Kreises in acht Puncten schneiden, welche sämmtlich auf dem Bogen ADB liegen. Wenn man endlich die eben erwähnten acht Puncte mit dem Puncte C durch Sehnen verbindet, welche den Durchmesser AB in den acht Puncten h_1, h_2, h_3, ... schneiden, und durch diese Puncte die zu AB senkrechten Sehnen A_1A_{16}, A_2A_{15}, A_3A_{14}, ... zieht, so ist $AA_1A_2A_3$ .... $A_{14}A_{15}A_{16}$ ein reguläres Siebenzehneck.

Anmerkung. Wenn man die Puncte N, N_1, in welchen der Umfang des Kreises von der Geraden Sc geschnitten wird, mit dem Puncte C durch die Sehnen CN_1, CN_2 verbindet, welche den Durchmesser AB in den Puncten n_1, n_2 schneiden, und alsdann durch diese Puncte die zu CD parallelen Sehnen P_1P_4, P_2P_3 zieht, so ist $AP_1P_2P_3P_4$ ein reguläres Fünfeck.

18.

Ueber die Inhalte der Polygone und Polyeder.

(Vom Herrn Professor v. *Staudt* in Erlangen.)

---

1. Wenn der Winkel, welchen die Richtungen zweier geraden Linien AB, CD mit einander bilden, durch (AB, CD) bezeichnet wird, so ist $2AB.CD.\cos(AB,CD) = (AD)^2 + (BC)^2 - (AC)^2 - (BD)^2$.

Fällt man nämlich aus den Puncten C, D auf die Gerade AB die Lothe CE, DF, so ist $(AD)^2 - (BD)^2 = (AF)^2 - (BF)^2 = (AF-BF)(AF+BF) = AB.(AF+BF)$. Zieht man hievon $(AC)^2 - (BC)^2 = AB(AE+BE)$ ab, so erhält man die Gleichung: $(AD)^2 + (BC)^2 - (AC)^2 - (BD)^2 = 2AB.EF = 2AB.CD.\cos(AB, CD)$.

2. Wenn MAB, NU_1U_2 zwei in einerlei Ebene liegende Dreiecke sind, und $MA.NU_r \cos(MA, NU_r) = a_r$, $MB.NU_r \cos(MB, NU_r) = b_r$ gesetzt wird, so ist $4MAB.NU_1U_2 = a_1b_2 - a_2b_1$.

Man construire das Parallelogramm MV_1BV_2, so dafs die Richtung der Seite MV_1 zu NU_1 und die Richtung der Seite MV_2 zu NU_2 senkrecht sei. Wenn man nun die Gleichung: $\sin(MA, MV_1).\sin(NU_1, NU_2) = \cos(MA, NU_1).\cos(MV_1, NU_2)$ mit $MA.MV_1.NU_1.NU_2 = MA.NU_1.MV_1.NU_2$ multiplicirt, und bemerkt, dafs für $MV_1 \cos(MV_1, NU_2)$ auch $MB \cos(MB, NU_2)$ gesetzt werden kann, so erhält man die Gleichung $4MAV_1.NU_1U_2 = a_1b_2$. Addirt man hiezu $4MAV_2.NU_1U_2 = -a_2b_1$, so folgt der Satz.

Anmerkung. Wird das Dreieck NU_1U_2 als positiv betrachtet, so ist das Dreieck ABC als positiv oder negativ zu betrachten, je nachdem es im Sinne des erstern, oder im entgegengesetzten Sinne construirt ist. Analoges gilt von Winkeln.

3. Wenn MAB, NU_1U_2 zwei beliebige Dreiecke sind, deren Ebenen einen Winkel von der Gröfse φ mit einander bilden, so ist

$$4MAB.NU_1U_2.\cos\varphi = a_1b_2 - a_2b_1,$$

wo a_1, a_2, b_1, b_2 das Vorige bedeuten.

Fället man nämlich aus den Puncten M, A, B auf die Ebene NU_1U_2 die Lothe MM', AA', BB', so ist $MAB.\cos\varphi = M'A'B'$, $MA\cos(MA, NU_1)$

$= M'A' \cos(M'A', NU_1)$, $MB \cos(MB, NU_1) = M'B' \cos(M'B', NU_1)$ u. s. w.; wonach der Satz leicht auf den vorhergehenden sich zurückführen läfst. Das Product $MAB . NU_1 U_2$ ist als positiv oder als negativ zu betrachten, je nachdem die beiden Dreiecke, im Fall die eine Ebene den Winkel Φ beschreibt, in einem und demselben oder im entgegengesetzten Sinne construirt erscheinen; daher es auch einerlei ist, ob man bei obigem Satze unter Φ den spitzen oder den stumpfen Winkel versteht, welchen die beiden Ebenen mit einander bilden. Sind die Ebenen der Dreiecke zu einander senkrecht, so ist $\cos\Phi = 0$; alsdann ist aber auch $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, indem $a_1 : b_1 = M'A' : M'B' = a_2 : b_2$ ist.

4. Wenn $A\hat{M}B$, $U_1\hat{N}U_2$ zwei beliebige ebene Winkel sind, deren Ebenen einen Winkel von der Gröfse Φ mit einander bilden, und $\cos(MA, NU_r) = \alpha_r$, $\cos(MB, NU_r) = \beta_r$ gesetzt wird, so ist

$$\sin A\hat{M}B . \sin U_1\hat{N}U_2 . \cos\Phi = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 .$$

Folgt aus dem vorigen Satze, wenn man beide Seiten der daselbst aufgestellten Gleichung durch $MA . MB . NU_1 . NU_2$ dividirt.

5. Wenn P, Q die Inhalte von zwei geradlinigen ebenen Figuren sind, deren Ebenen einen Winkel von der Gröfse Φ mit einander bilden, so ist $16 P . Q . \cos\Phi$ eine ganze algebraische Function von den Quadraten der geraden Linien, welche die Eckpuncte der einen Figur mit den Eckpuncten der andern verbinden. Es besteht diese Function, wenn die eine Figur m und die andere n Seiten hat, aus mn positiven und eben so vielen negativen Gliedern. Man erhält die positiven Glieder, wenn man das Quadrat einer jeden geraden Linie, welche einen Eckpunct der einen Figur mit einem Eckpuncte der andern verbindet, mit dem Quadrate der geraden Linie multiplicirt, welche die zunächst folgenden Eckpuncte verbindet. Man erhält die negativen Glieder, wenn man das Quadrat einer jeden geraden Linie, welche einen Eckpunct der einen Figur mit einem Eckpuncte der andern verbindet, mit dem Quadrate der geraden Linie multiplicirt, welche den zunächst folgenden Eckpunct der ersten Figur mit dem zunächst vorhergehenden Eckpuncte der letzten verbindet. Ist daher AB eine Seite der einen und $U_1 U_2$ eine Seite der andern Figur, so kann man sagen, dafs aus der Verbindung dieser beiden Seiten die beiden Glieder $+(AU_1)^2 . (BU_2)^2 - (AU_2)^2 . (BU_1)^2$ entstehen.

Man habe fürs Erste zwei Dreiecke MAB, NU_1U_1, so ist (nach 3. und 1.)

$$16P.Q.\cos\Phi = 2a_1.2b_2 - 2a_2.2b_1 =$$
$$[(MU_1)^2+(AN)^2-(AU_1)^2-(MN)^2][(MU_2)^2+(BN)^2-(BU_2)^2-(MN)^2]$$
$$-[(MU_2)^2+(AN)^2-(AU_2)^2-(MN)^2][(MU_1)^2+(BN)^2-(BU_1)^2-(MN)^2].$$

Die Entwicklung dieses Ausdrucks führt auf dieselben 18 Glieder, welche man erhält, wenn man auf die oben angegebene Weise jede von den drei Seiten MA, AB, BM des einen Dreiecks mit jeder von den drei Seiten NU_1, U_1U_2, U_2N des andern Dreiecks verbindet. Ist die eine Figur ein Dreieck MAB, die andere aber ein n Eck $U_1U_2U_3 \ldots . U_n$, so ist, wenn man in der Ebene der letztern einen beliebigen Punct N annimmt, $16P.Q.\cos\Phi = 16P.NU_1U_2.\cos\Phi + 16P.NU_2U_3.\cos\Phi + 16P.NU_3U_4.\cos\Phi +$ etc. Da nun die Seite $U_{r+1}N$ des Dreiecks NU_rU_{r+1} und die Seite NU_{r+1} des Dreiecks $NU_{r+1}U_{r+2}$ einander entgegengesetzt sind, und also die Glieder, welche aus den Verbindungen solcher Seiten mit den Seiten des Dreiecks MAB entstehen, sich gegen einander aufheben, so folgt, dafs man den Werth von $16P.Q\cos\Phi$ erhält, wenn man jede Seite des Dreiecks MAB mit einer jeden von den Seiten U_1U_2, U_2U_3, U_3U_4 u. s. w. des n Ecks verbindet. Auf dieselbe Weise wird der Fall, wenn jede von den beiden Figuren mehr als drei Seiten hat, auf den so eben bewiesenen zurückgeführt.

6. Wenn P den Inhalt einer geradlinigen ebenen Figur $U_1U_2U_3 \ldots$ $\ldots U_n$ bezeichnet, welche von n Seiten eingeschlossen ist, so ist $16P^2$ eine algebraische ganze Function von den Quadraten der geraden Linien, von welchen jede zwei Eckpuncte der Figur mit einander verbindet. Es besteht nämlich (nach 5) $16P^2$ aus n Gliedern von der Form $-(U_rU_{r+1})^4$, wo U_rU_{r+1} eine Seite der Figur bezeichnet; dann aus n Gliedern der Form $+2(U_rU_{r+1})^2.(U_{r+1}U_{r+2})^2$, wo U_rU_{r+1} und $U_{r+1}U_{r+2}$ zwei auf einander folgende Seiten bezeichnen, und endlich noch aus $n(n-3)$ Gliedern, welche aus den Verbindungen von je zwei nicht auf einander folgenden Seiten U_rU_{r+1}, $U_\varrho U_{\varrho+1}$ entstehen, und von welchen die positiven von der Form $+2(U_rU_\varrho)^2.(U_{r+1}U_{\varrho+1})^2$, die negativen aber von der Form $-(2U_rU_{\varrho+1})^2.(U_{r+1}U_\varrho)^2$ sind. Im Fall also die Figur ein Viereck ist, und seine Seiten der Ordnung nach durch a, b, c, d, seine Diagonalen aber durch e, f bezeichnet werden, so ist

$$16U^2 = -a^4-b^4-c^4-d^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2d^2+2d^2a^2-2a^2c^2-$$
$$2b^2d^2+4e^2f^2 = (2ef+a^2+c^2-b^2-d^2)(2ef+b^2+d^2-a^2-c^2).$$

Dasselbe folgt auch aus 1., wenn man bemerkt, dafs $16P^2 = 4e^2f^2\sin\psi^2 = (2ef + 2ef\cos\psi)(2ef - 2ef\cos\psi)$ ist, wo ψ den Winkel bezeichnet, unter welchem die Diagonalen sich schneiden.

7. Wenn $MABC$, $NU_1U_2U_3$ zwei beliebige Tetraëder sind, und

$$MA.NU_r\cos(MA, NU_r) = a_r, \quad MB.NU_r\cos(MB, NU_r) = b_r,$$
$$MC.NU_r\cos(MC, NU_r) = c_r$$

gesetzt wird, so ist

$$36\,MABC.NU_1U_2U_3 = (a_1b_2 - a_2b_1).c_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2.$$

Man betrachte MC als die Diagonale eines Parallelepipedons, von welchem eine Kante MV_3 zur Ebene NU_1U_2, eine andere MV_1 zur Ebene NU_2U_3 und die dritte MV_2 zur Ebene NU_3U_1 senkrecht ist. Bezeichnet man nun durch Φ den Winkel, welchen die Grundflächen MAB, MU_1U_2 der beiden Tetraëder $MABV_3$, $NU_1U_2U_3$ mit einander bilden, so ist $c_3\cos\Phi$ das Product aus ihren Höhen und also $36\,MABV_3.NU_1U_2U_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$. Eben so ist $36\,MABV_1.NU_1U_2U_3 = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1$ und $36\,MABV_2.NU_1U_2U_3 = (a_3b_1 - a_1b_3)c_2$; woraus der Satz folgt.

Anmerkung. Man kann, um den obigen Satz zu beweisen, auch die Bedeutung der einzelnen Glieder $+a_1b_2c_3$, $-a_2b_1c_3$, $a_2b_3c_1$ u. s. w. nachweisen. Betrachtet man nämlich auch MB als die Diagonale eines Parallelepipedons, von welchem eine Kante ML_3 zur Ebene NU_1U_3, eine andere ML_1 zur Ebene NU_2U_3 und die dritte ML_2 zur Ebene NU_3U_1 senkrecht ist, so ist

$$a_1b_2c_3 = 36\,MAL_2V_3.NU_1U_2U_3, \quad -a_2b_1c_3 = 36\,MAL_1V_3.NU_1U_2U_3 \text{ u. s. w.}$$

8. Versteht man unter dem Sinus eines Dreikants (einer dreiseitigen Raumecke) $A\hat{M}BC$ das Product aus dem Sinus des von zwei Kanten MA, MB eingeschlossenen Winkels in den Sinus desjenigen Winkels, welchen die dritte Kante MC mit der Ebene des ersteren bildet, so ist der Inhalt des Tetraëders $MABC = \frac{1}{6}MA.MB.MC.\sin(A\hat{M}BC)$. Wenn daher $A\hat{M}BC$, $U_1\hat{N}U_2U_3$ zwei beliebige Dreikanten sind, und $\cos(MA, NU_r) = \alpha_r$, $\cos(MB, NU_r) = \beta_r$, $\cos(MC, NU_r) = \gamma_r$ gesetzt wird, so ist

$$\sin(A\hat{M}BC).\sin(U_1\hat{N}U_2U_3)$$
$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\gamma_3 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\gamma_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\gamma_2.$$

Durch den so eben eingeführten Begriff können die Bedingungen, unter welchen vier auf einen und denselben Punct, aber nicht in einerlei Ebene wirkende Kräfte sich im Gleichgewichte halten, sehr einfach ausgedrückt werden. Dividirt man nämlich jede von den vier geraden Linien,

welche die Eckpuncte eines Tetraëders mit seinem Schwerpuncte verbinden, durch den Sinus der Raum-Ecke, welche die drei übrigen mit einander bilden, so erhält man vier gleiche Quotienten.

9. Das Product PQ aus den Inhalten von zwei ebenflächigen Körpern ist eine ganz algebraische Function von den Quadraten der geraden Linien, welche die Eckpuncte des einen Körpers mit den Eckpuncten des andern verbinden. Ist nämlich der eine Körper von m und der andere von n Dreiecken eingeschlossen, so ist das Product $288 P.Q$ einem Polynomium gleich, welches aus $3mn$ positiven und eben so vielen negativen Gliedern besteht. Ist ABC eine Seite des einen und $U_1 U_2 U_3$ eine Seite des andern Körpers, so dafs von diesen beiden Dreiecken, im Fall man die Oberflächen der Körper von aufsen betrachtet, entweder jedes auf der linken oder jedes auf der rechten Seite seines Umfangs liegt, so entstehen aus der Verbindung derselben die sechs Glieder

$$(AU_1)^2.(BU_3)^2.(CU_2)^2+(AU_2)^2.(BU_1)^2.(CU_3)^2+(AU_3)^2.(BU_2)^2.(CU_1)^2$$
$$-(AU_1)^2.(BU_2)^2.(CU_3)^2-(AU_2)^2.(BU_3)^2.(CU_1)^2-(AU_3)^2.(BU_1)^2.(CU_2)^2.$$

Indem man auf diese Weise jede Seite des einen Körpers mit jeder Seite des andern verbindet, erhält man die erwähnten $6mn$ Glieder, deren algebraische Summe den Werth von $288 PQ$ giebt.

Es folgt dieser Satz, wenn beide Körper Tetraëder sind, aus (7.) und (1.). Auf diesen Fall kann alsdann jeder andere Fall leicht zurückgeführt werden.

10. Wenn man drei Kanten eines Tetraëders, welche von einem und demselben Puncte ausgehen, durch a, b, c, die ihnen gegenüberliegenden Kanten durch a', b', c' und seinen Inhalt durch P bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned}144PP = {} & a^2a'^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)\\ & +b^2b'^2(c^2+c'^2+a^2+a'^2-b^2-b'^2)\\ & +c^2c'^2(a^2+a'^2+b^2-b'^2-c^2-c'^2)\\ & -a'^2b'^2c'^2-a^2b^2c'^2-a^2b'^2c^2-a'^2b^2c^2.\end{aligned}$$

19.

Démonstration d'un théorème sur quelques intégrales définies.

(Par Mr. *C. Ramus* de Copenhague.)

L'objet de cet article est de reproduire avec de plus amples développements la démonstration d'un théorème de Mr. *Jürgensen,* insérée dans le Tome XXIII. pag. 143 de ce journal, mais qui a paru inexacte à quelques géomètres.

Dans l'intégrale connue

$$1.\quad \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)y^m} = \frac{\pi}{\sin m\pi} \qquad (0<m<1)$$

je substitue $y=\frac{t-\alpha}{\alpha-x}$, où t désigne la nouvelle variable et α et x des quantités constantes, ce qui donne

$$2.\quad \begin{cases} \text{pour } \alpha-x \text{ positif: } \dfrac{(-1)^{1+m}\sin m\pi}{\pi}\displaystyle\int_\alpha^\infty \frac{dt}{(x-t)(t-\alpha)^m} = \frac{1}{(x-\alpha)^m}, \\ \text{pour } \alpha-x \text{ négatif: } \dfrac{(-1)^m\sin m\pi}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\alpha \frac{dt}{(x-t)(t-\alpha)^m} = \frac{1}{(x-\alpha)^m}, \end{cases}$$

ou bien

$$3.\quad \frac{(-1)^{1+m}\sin m\pi}{\pi}\int_\alpha^{\pm\infty} \frac{dt}{(x-t)(t-\alpha)^m} = \frac{1}{(x-\alpha)^m},$$

la limite supérieure étant $+\infty$ ou $-\infty$, suivant que $\alpha-x$ est positif ou négatif. Or on la formule suivante

$$4.\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)} \\ \qquad = \Pi\dfrac{f(z)}{z-x} + \dfrac{k_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{k_2}{x-\alpha_2}\dots + \dfrac{k_n}{x-\alpha_n}, \\ k_i = \dfrac{\varphi(\alpha_i)}{(\alpha_i-\alpha_1)(\alpha_i-\alpha_2)\dots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\dots(\alpha_i-\alpha_n)}, \end{cases}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle et entière de x, et $\Pi\psi(z)$ désignant le coëfficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de $\psi(z)$ suivant des puissances entières et déscendantes de z. Dans les deux expressions (4) de $f(x)$ je substitue t_1 à α_1, t_2 à α_2, ... t_n à α_n, je multiplie par

$$\frac{(-1)^{n+m_1+m_2\ldots\ldots+m_n}\sin m_1\pi.\sin m_2\pi\ldots\ldots\sin m_n\pi}{\pi^n(t_1-\alpha_1)^{m_1}(t_2-\alpha_2)^{m_2}\ldots\ldots(t_n-\alpha_n)^{m_n}}\,dt_1\,dt_2\ldots\ldots dt_n,$$

et je prends les intégrales depuis

$$t_1=\alpha_1,\quad t_2=\alpha_2,\quad\ldots\ldots\quad t_n=\alpha_n,$$

jusqu'à

$$t_1=\pm\infty,\ t_2=\pm\infty,\ \ldots\ldots\ t_n=\pm\infty,$$

la limite supérieure de t_1 étant $+\infty$ ou $-\infty$, suivant que α_1-x est positif ou négatif, celle de t_2 étant $+\infty$ ou $-\infty$, suivant que α_2-x est positif ou négatif, et ainsi de suite. Dans la première expression (4) toutes les intégrations indiquées s'effectuent facilement au moyen de la formule (3), et le resultat, que nous appelons $F(x)$, sera

$$5.\quad F(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots\ldots(x-\alpha_n)^{m_n}},$$

les nombres m_1, m_2, ... m_n étant supposés tous compris entre 0 et 1. Le prémier terme $\Pi\frac{f(z)}{z-x}$ du sécond membre de (4), étant traité de la même manière, devient $\Pi\frac{F(z)}{z-x}$. Car la fonction $\frac{f(z)}{z-x}$, étant soumise à la même opération, devient $\frac{F(z)}{z-x}$, comme il vient d'être démontré; mais au lieu d'opérer immédiatement sur cette fonction même, on peut la développer suivant des puissances entières et déscendantes de z, et puis opérer sur chaque coëfficient en particulier, notamment sur celui de $\frac{1}{z}$, ce qui produit nécessairement le coëfficient de $\frac{1}{z}$ du développement de $\frac{F(z)}{z-x}$. Considérons enfin le terme général $\frac{k_i}{x-\alpha_i}$ ou

$$\frac{\varphi(\alpha_i)}{(\alpha_i-\alpha_1)(\alpha_i-\alpha_2)\ldots\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots\ldots(\alpha_i-\alpha_n)}\cdot\frac{1}{x-\alpha_i}.$$

En faisant les substitutions et la multiplication indiquées plus haut, il vient

$$\frac{(-1)^{n+m_1+m_2\ldots\ldots+m_n}\sin m_1\pi.\sin m_2\pi\ldots\ldots\sin m_n\pi.\varphi(t_i)\,dt_1.dt_2\ldots\ldots dt_i\ldots\ldots dt_n}{\pi^n(t_i-t_1)(t_i-t_2)\ldots\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots\ldots(t_i-t_n).(t_1-\alpha_1)^{m_1}\ldots\ldots(t_n-\alpha_n)^{m_n}}\cdot\frac{1}{x-t_i},$$

formule à soumettre aux intégrations successives relatives à $t_1, t_2, \ldots\ldots t_i, \ldots\ldots t_n$, entre les limites indiquées ci-dessus. L'ordre de ces intégrations étant indifférent, il convient de supprimer d'abord celle relative a t_i, en exécutant toutes les autres au moyen de la formule (3), puis à indiquer la seule restante par le signe d'intégration. Par là on trouve:

$$6.\quad\frac{(-1)^{1+m_i}\sin m_i\pi}{\pi}\int_{\alpha_i}^{\pm\infty}\frac{\varphi(t_i)\,dt_i}{(t_i-\alpha_1)^{m_1}(t_i-\alpha_2)^{m_2}\ldots\ldots(t_i-\alpha_n)^{m_n}}\cdot\frac{1}{x-t_i},$$

où l'on voit, que le seul facteur $(t_i-\alpha_i)^{m_i}$ du dénominateur est resté intact dans toutes les intégrations précédentes, tandis que tous les autres facteurs

$(t_i-\alpha_1)^{m_1}$, $(t_i-\alpha_2)^{m_2}$, ... $(t_i-\alpha_{i-1})^{m_{i-1}}$, $(t_i-\alpha_{i+1})^{m_{i+1}}$, ... $(t_i-\alpha_n)^{m_n}$

ont été introduits successivement par ces mêmes intégrations relatives à t_1, t_2, ... t_{i-1}, t_{i+1}, ... t_n. Au moyen de la formule (5) l'expression (6) peut être présentée sous cette autre forme plus simple:

$$7. \quad \frac{(-1)^{m_i}\sin m_i\pi}{\pi}\int_{\alpha_i}^{\pm\infty}\frac{F(t)}{t-x}\,dt.$$

Chaque terme de la série $\frac{k_1}{x-\alpha_1}+\frac{k_2}{x-\alpha_2}\ldots+\frac{k_n}{x-\alpha_n}$ du sécond membre de (4) étant traité de cette manière, et les quantités α_1, α_2, ... α_n étant rangées suivant l'ordre de leur grandeur, en commençant par la plus petite (les quantités négatives étant regardées comme moindres que les positives), on trouve

$$(x<\alpha_1)\qquad F(x)=\Pi\frac{F(t)}{t-x}+\frac{1}{\pi}\,S_{i=1}^{i=n}(-1)^{m_i}\sin m_i\pi\int_{\alpha_i}^{+\infty}\frac{F(t)}{t-x}\,dt,$$

$$(x>\alpha_n)\qquad F(x)=\Pi\frac{F(t)}{t-x}-\frac{1}{\pi}\,S_{i=1}^{i=n}(-1)^{m_i}\sin m_i\pi\int_{-\infty}^{\alpha_i}\frac{F(t)}{t-x}\,dt,$$

$$(\alpha_p<x<\alpha_{p+1})\qquad F(x)=\Pi\frac{F(t)}{t-x}-\frac{1}{\pi}\,S_{i=1}^{i=p}(-1)^{m_i}\sin m_i\pi\int_{-\infty}^{\alpha_i}\frac{F(t)}{t-x}\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\,S_{i=p+1}^{i=n}(-1)^{m_i}\sin m_i\pi\int_{\alpha_i}^{+\infty}\frac{F(t)}{t-x}\,dt.$$

Cette dernière formule et celle, dont Mr. *Jürgensen* a déduit les théoremes de Mr. *Richelot*, coïncident, comme on peut le voir dans le mémoire intitulé „Note relative à un mémoire de Mr. *Richelot* sur quelques intégrales définies" (Tome XXIII pag. 142).

6 août 1842.

20.

Démonstration d'un théorème sur les équations différentielles linéaires à deux variables.

(Par Mr. *C. Ramus* de Copenhague.)

Dans la „Note sur une propriété des équations différentielles linéaires à deux variables" insérée dans le Tome XXIII de ce journal, j'ai énoncé le théorème, que l'équation auxiliaire (5) étant transformée de la même manière, dont on l'a dérivée de l'équation (1), elle donne une nouvelle transformée, qui se ramène à (4). Voici la démonstration générale de ce théorème. L'équation (5) peut être écrite comme suit:

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n}+R_1\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}+R_2\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}}\dots\dots+R_n\varphi=0,$$

les coëfficients R_1, R_2, ... R_n étant déterminés par cette loi générale:

$$R_i=(-1)^i\Big[P_i-\frac{n-i+1}{1}\cdot\frac{dP_{i-1}}{dx}+\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{1.2}\cdot\frac{d^2P_{i-2}}{dx^2}$$
$$-\frac{(n-i+3)(n-i+2)(n-i+1)}{1.2.3}\cdot\frac{d^3P_{i-3}}{dx^3}\dots\dots(-1)^{i-1}\frac{(n-1)(n-2)\dots\dots(n-i+1)}{1.2\dots\dots i-1}\cdot\frac{d^{i-1}P_1}{dx^{i-1}}\Big].$$

De là on tire la nouvelle formule auxiliaire:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+S_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+S_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\dots\dots+S_ny=0,$$

le coëfficient génèral S_i étant déterminé par l'équation

$$S_i=(-1)^i\Big[R_i-\frac{n-i+1}{1}\cdot\frac{dR_{i-1}}{dx}+\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{1.2}\cdot\frac{d^2R_{i-2}}{dx^2}$$
$$-\frac{(n-i+3)(n-i+2)(u-i+1)}{1.2.3}\cdot\frac{d^3R_{i-3}}{dx^3}\dots\dots(-1)^{i-1}\frac{(n-1)(n-2)\dots\dots(n-i+1)}{1.2\dots\dots i-1}\cdot\frac{d^{i-1}R_1}{dx^{i-1}}\Big].$$

Or en substituant à R_i l'expression qui précède, et à R_{i-1}, R_{i-2}, ... R_1 leurs expressions analogues, on trouve

$$S_i=P_i+A_1\frac{dP_{i-1}}{dx}+A_2\frac{d^2P_{i-2}}{dx^2}\dots\dots+A_{i-1}\frac{d^{i-1}P_1}{dx^{i-1}},$$

les coëfficients A_1, A_2, ... A_{i-1} étant déterminés par la formule

$$A_k=(-1)^k\Big[\frac{(n-i+k)(n-i+k-1)\dots(n-i+1)}{1.2\dots k}-\frac{n-i+1}{2}\cdot\frac{(n-i+k)\dots(n-i+2)}{1\dots k-1}$$
$$+\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{1.2}\cdot\frac{(n-i+k)\dots(n-i+3)}{1\dots k-2}$$
$$\dots(-1)^{k-1}\frac{(n-i+k-1)\dots(n-i+1)}{1\dots k-1}\cdot\frac{n-i+k}{1}+(-1)^k\frac{(n-i+k)\dots(n-i+1)}{1\dots k}\Big]$$
$$=(-1)^k\frac{(n-i+k)(n-i+k-1)\dots(n-i+1)}{1.2\dots k}\Big[1-\frac{k}{1}+\frac{k(k-1)}{1.2}\dots(-k)^{k-1}\frac{k}{1}+(-1)^k\Big],$$

partant $A_k=0$, parceque $1-\frac{k}{1}+\frac{k(k-1)}{1.2}\dots+(-1)^k=(1-1)^k=0$. On aura donc $A_1=0$, $A_2=0$, ... $A_{i-1}=0$, d'où l'on tire

$$S_i=P_i,$$

et c'est ce que dit le théorème, q. f. d.

6 août 1842.

21.
Theorie der Centralen.

(Vom Herrn *H. Grafsmann*, Lehrer der Mathematik zu Stettin.)

Die grofsen Fortschritte, welche die neuere Geometrie in der Behandlung der Kegelschnitte gemacht hat, sind fast alle an die eigenthümliche Beziehung zwischen Pol und Polare geknüpft. Indem ich diese Beziehung analytisch abzuleiten versuchte, gelangte ich zu einer Verallgemeinerung derselben, welche nicht nur alle algebraischen Curven und Oberflächen umfafste, sondern auch in Bezug auf Curven und Oberflächen höherer Ordnungen die Polare selbst nur als besondere Art einer allgemeineren Gattung erscheinen liefs. Daraus entwickelte sich die nachstehende Theorie, welche eine so reichhaltige Reihe von Beziehungen zwischen den Curven und Oberflächen aller Ordnungen darbietet, oder noch verspricht, dafs ich wohl glauben darf, in ihr den wahren Gesichtspunct gefunden zu haben, von wo aus sich der Zusammenhang der verschiedenen algebraischen Gebilde überschauen läfst, und dafs ich hoffen darf, es werde durch Entwickelung dieser Theorie auch schon jetzt, wo sie erst in ihren Keimen vorliegt, ein nicht unwesentlicher Beitrag zur Theorie jener Curven überhaupt geliefert werden. Die ganze Theorie drängt sich um einen Satz zusammen, als dessen besondere Gestaltungen und unmittelbare Anwendungen alle ihre Resultate erscheinen, und welchen ich am vollständigsten am Schlusse dieses Aufsatzes mitgetheilt habe. Den grofsen Reichthum der Beziehungen, welche dieser Satz darbietet, wird man einigermafsen übersehen, wenn man bemerkt, dafs nicht nur alle jene schönen Sätze, welche Poncelet in seinem *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* aufstellt, nur als höchst specielle Fälle desselben erscheinen, sondern dafs auch die wichtigsten und allgemeinsten Sätze über Durchmesser und Durchmesser-Ebenen, Asymptoten, Tangenten und Tangential-Ebenen, über Krümmungsschwerpuncte von Curven und Oberflächen u. s. w. nur als ganz specielle Fälle jenes Satzes sich zeigen und hier in ihrem unmittelbarsten Wesen und Zusammenhange ans Licht treten; ja so weit scheint dieser Zusammenhang zu reichen, dafs es wohl kaum einen allgemeinen Satz über alge-

braische Curven und Oberflächen geben mag, welcher nicht mit jenem Satze in der engsten Beziehung stände. Die Entwickelung werde ich Schritt um Schritt genau in der Art geben, in welcher ich zu dem Resultate gelangt bin. Daher werde ich es mir erlauben, jene bekannte Beziehung zwischen Pol und Polare eines Kegelschnittes analytisch abzuleiten, um bei dieser Entwickelung zugleich die Möglichkeit einer Verallgemeinerung und die Art, wie sie zu bewerkstelligen sein dürfte, in bestimmten Zügen vor die Augen zu stellen; und zwar in der Weise, wie sie sich bei jener analytischen Ableitung aufschlofs. Von diesem Satze aus werde ich dann (in §. 2. und 3.) die Verallgemeinerung, mit Einschaltung der Betrachtungen, welche mich dazu leiteten, ausführen. Als ich bis zu diesem Punct der Entwickelung gekommen war, wurde ich durch die Analogie der Resultate auf das oben angeführte Mémoire von Poncelet geleitet, welches mich dann zu der in §. 4. vorgenommenen Vereinfachung führte und zu der in §. 8. ausgeführten reciproken Umwandlung veranlafste, während die dazwischen befindlichen Paragraphen nur Folgerungen aus dem Hauptsatz enthalten. Die Schlufsbemerkung endlich stellt eine noch höhere Stufe der Verallgemeinerung dar.

Bei der ganzen Entwickelung werde ich mich stets derjenigen Bezeichnung einer Strecke durch ihre Endpuncte bedienen, in welcher die Richtung vom Anfangspuncte zum Endpuncte hin zugleich mit festgehalten wird, und wonach also AB und BA, wenn A und B Puncte vorstellen, als entgegengesetzte Gröfsen aufgefafst werden, d. h. $AB = -BA$ oder $AB + BA = 0$ gesetzt wird; wonach ferner, wenn A, B, C Puncte einer Geraden sind, allemal $AB + BC = AC$ ist, welche Lage auch immer die drei Puncte in jener Geraden haben mögen, und wonach endlich zwei Verhältnisse einander entgegengesetzt genannt werden, wenn die Glieder des einen gleichgerichtete, die des anderen entgegengesetzt gerichtete Strecken darstellen *). Sind z. B. a, b, c, d vier Strecken, und ist $\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}$, so sagen wir: a verhält sich zu b entgegengesetzt, wie c zu d.

*) Diese Bezeichung ist in solcher Art schon von *Möbius* mit grofser Consequenz festgehalten; vergl. dessen barycentrischen Calcul p. 3 u. f.

§. 1. Analytische Ableitung der Polare eines Kegelschnittes in Bezug auf einen Punct.

Der Satz, dessen analytischen Beweis wir hier zum Ausgangspunct der Entwickelung nehmen, ist folgender:

„Wenn man von einem festen Puncte P durch einen festen Kegelschnitt eine bewegliche Gerade zieht, welche denselben in zwei Puncten S_1 und S_2 schneidet, und man bestimmt auf dieser Geraden den zu P und dem Punctenpaare S_1 und S_2 gehörigen vierten harmonischen Punct Q, d. h. denjenigen Punct, dessen Entfernungen von den beiden Durchschnittspuncten sich entgegengesetzt verhalten, wie die Entfernungen des festen Punctes von denselben Durchschnittspuncten, so ist der Ort des so bestimmten Punctes Q eine Gerade."

Nämlich vermöge der im Satze ausgesprochenen Bedingung hat man:

$$\frac{QS_1}{QS_2} = -\frac{PS_1}{PS_2}, \text{ oder } QS_1.PS_2 + QS_2.PS_1 = 0.$$

Um hier alle Entfernungen von dem festen Puncte P aus zu haben, setzen wir $QS_1 = QP + PS_1 = PS_1 - PQ = s_1 - q$, indem wir die Entfernung eines jeden Punctes von dem festen Puncte mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen und erhalten:

$$[1] \quad 2s_1s_2 = q(s_1 + s_2):$$

eine Gleichung, welche die harmonische Lage des Punctes Q bestimmt. Wir machen ferner den festen Punct P zum Durchschnittspunct zweier Richt-Axen, und nehmen an, die Gleichung des Kegelschnittes sei dann:

$$[2] \quad y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0,$$

welche Gleichung also die Relation zwischen den Richtstücken x und y irgend eines Punctes S im Umfang des Kegelschnittes darstellt *). Endlich nehmen wir an, dafs x' und y' die Richtstücke des Punctes Q seien, bezogen auf dasselbe Axenkreuz. Dann haben wir, wenn P, S, Q, wie es im Satze gefordert wird, in einer Geraden liegen sollen, die Gleichungen

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{s}{q};$$

weil nämlich das von den Strecken x, y, s umschlossene Dreieck dem von x', y', q umschlossenen ähnlich ist, so dafs

$$[3] \quad x = \frac{s}{q}x'; \quad y = \frac{s}{q}y'.$$

---

*) Statt der Namen Coordinaten und Coordinaten-Axen gebrauche ich die deutschen Namen Richtstücke und Richt-Axen: eine Benennung, welche wohl keiner Rechtfertigung bedarf.

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung [2] erhält man:

$$[4] \qquad \frac{y'^2+ax'y'+bx'^2}{q^2}s^2+\frac{cy'+dx'}{q}s+e=0.$$

Die Wurzelwerthe s_1 und s_2 dieser quadratischen Gleichung sind dann schliefslich in [1] zu substituiren, um die gesuchte Ortsgleichung für Q zu erhalten. Da aber jene Gleichung [1] nur die Summe und das Product der Wurzeln enthält, so können wir von dem bekannten Gesetze Anwendung machen, dafs die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung sich zu ihrem Producte entgegengesetzt verhält, wie der Coëfficient der ersten Potenz der Unbekannten zu der Constanten; also

$$(s_1+s_2):s_1.s_2=\frac{cy'+dx'}{q}:(-e).$$

Diese Werthe in die Gleichung [1.] substituirt, geben

$$[5] \qquad cy'+dx'+2e=0$$

als Ortsgleichung des Punctes Q: also ist sein Ort eine Gerade. Diese Gerade nun ist es, welche man die Polare des Kegelschnittes in Bezug auf den Punct P nennt.

§. 2. Verallgemeinerung des gefundenen Resultats.

Betrachtet man den Gang des so eben geführten Beweises, um die Möglichkeit einer Verallgemeinerung zu übersehen, so ist zunächst klar, dafs die Bedingungsgleichungen [3] für die Lage der Puncte P, S, Q in einer Geraden unabhängig sind von der Natur der Curve, und dafs sie auch noch auf dieselbe Weise für die Oberflächen gelten. Ist daher statt der Gleichung [2] die Gleichung irgend einer Curve oder Oberfläche gegeben, so wird daraus durch Substitution vermittelst der Gleichungen [3] eine Gleichung hervorgehen, welche der Gleichung [4] entspricht und welche in Bezug auf s von demselben Grade ist, wie die neue Gleichung [2]. In der That bestimmt die Gleichung [4] alsdann nur die Durchschnittspuncte einer von dem Axendurchschnitt P aus gezogenen Geraden mit der gegebenen Curve oder Oberfläche. Der eigentliche Nerv jenes Beweises liegt nun aber offenbar in dem Uebergange aus der Gleichung [4] in [5]. Dieser Uebergang wurde vermittelt durch den Satz, welcher die Relation zwischen den Wurzeln einer quadratischen Gleichung und deren Coëfficienten darstellt. In demselben Maafse also, wie sich diese Relation verallgemeinern läfst, wird sich auch das darauf gegründete Resultat verallgemeinern lassen.

Hiermit haben wir demnach das wesentliche Princip der beabsichtigten Verallgemeinerung gefunden. Die allgemeine Relation zwischen den Wurzeln einer Gleichung und den Coëfficienten derselben läfst sich am einfachsten und allgemeinsten auf folgende Weise aussprechen: „In jeder algebraischen Gleichung verhalten sich die Coëfficienten zweier Potenzen der Unbekannten, wenn die Differenz der beiden Potenz-Exponenten gerade ist, eben so, wenn ungerade, entgegengesetzt, wie diejenigen Combinationsclassen der Wurzeln, deren Classenzahlen jene Exponenten zu der Gradzahl der ganzen Gleichung ergänzen; wenn nämlich die Combinationen als Producte ihrer Elemente aufgefafst und zu einander addirt werden." Ist also a_r der Coëfficient, welcher zur $r$ten Potenz der Unbekannten gehört, und bezeichnet c_r die $r$te Combinationsclasse aus den Wurzeln, im Sinne des Satzes genommen, so hat man, wenn n die Gradzahl der Gleichung ist,

$$\frac{c_{n-r}}{c_{n-s}} = \frac{a_r}{a_s}(-1)^{s-r},$$

wo der Factor $(-1)^{s-r}$ nur das Gesetz der Zeichen darstellt. Setzt man hier $n=s$, so hat man, da die 0te Combinationsclasse allemal der Einheit gleich ist,

$$c_{n-r} = \frac{a_r}{a_n}(-1)^{n-r}:$$

eine Form, von welcher wir besonders Gebrauch machen werden. — Vermittelst dieses Gesetzes nun hatten wir aus der Gleichung [4] die Endgleichung [5] dadurch abgeleitet, dafs wir die Coëfficienten der ersteren statt der Summe und des Productes der Wurzeln in [1] substituirt hatten; wobei q von selbst wegfiel. Wir werden also jetzt im allgemeinen Falle statt der Gleichung [1] eine solche Gleichung annehmen müssen, welche nur von den Combinationsclassen der Wurzeln aus [4] abhängt, und zwar so, dafs, indem wir die Coëfficienten von [4] statt dieser Combinationsclassen in die neue Gleichung [1] substituiren, q von selbst wegfalle. Nehmen wir an, dafs in dieser Gleichung [1] jede Potenz von q nur mit einer Combinationsclasse der Wurzeln multiplicirt sei, so überzeugt man sich leicht, dafs, damit q bei jener Substitution wegfalle, die Ordnungszahl dieser Combinationsclasse den zugehörigen Exponenten von q zu n, der Grundzahl der Gleichung, ergänzen müsse; wie sich dies bei der nachfolgenden Entwickelung noch deutlicher darlegen wird *). Wir haben nun

*) Dieselbe Bedingung, dafs q wegfalle, läfst sich noch auf eine allgemeinere Weise realisiren, indem man in der Gleichung [1] jede Potenz von q mit einem Pro-

alle Elemente der beabsichtigten Verallgemeinerung zur Hand, durch deren Zusammenstellung wir daher sogleich zu dem gesuchten Satze in seiner allgemeinsten Form gelangen werden.

Es sei sonach von einem festen Puncte P durch eine feste Oberfläche $n$ter Ordnung eine bewegliche Gerade gezogen, welche dieselbe in den Puncten $S_1 \dots S_n$ schneide. Man bestimme in dieser Geraden den Punct Q durch die Gleichung

$$(1) \quad \alpha_n q^n + \alpha_{n-1}(s_1 \dots s_n)^{\cdot 1} q^{n-1} + \alpha_{n-2}(s_1 \dots s_n)^{\cdot 2} q^{n-2} \dots \\ \dots + \alpha_1 (s_1 \dots s_n)^{\cdot n-1} + \alpha_0 (s_1 \dots s_n)^{\cdot n} = 0,$$

in welcher wieder, wie oben, statt PQ, PS_1 u. s. w. q, s_1 u. s. w. gesetzt ist, worin ferner $(s_1 \dots s_n)^{\cdot r}$ die $r$te Combinationsclasse aus den Entfernungen $s_1 \dots s_n$ in dem oben angegebenen Sinne bezeichnet, und worin $\alpha_n \dots$ $\dots \alpha_0$ constante Coëfficienten sind. Um diese Gleichung kürzer schreiben zu können, bedienen wir uns der bekannten Summenbezeichnung, und haben also

$$1. \quad \Sigma \alpha_a (s_1 \dots s_n)^{\cdot n-a} q_a = 0,$$

indem das Summenzeichen die Summe aller Glieder darstellt, welche man erhält, wenn man dem a nach und nach alle Werthe von n bis 0 giebt *). Es sei ferner die Gleichung der gegebenen Oberfläche, den Punct P wieder zum Axendurchschnitt genommen,

$$F_n(x,y,z) + F_{n-1}(x,y,z) + \dots + F_1(x,y,z) + F_0(x,y,z) = 0,$$

indem wir hier unter $F_r(x,y,z)$ eine homogene Function vom $r$ten Grade von x, y, z, d. h. eine solche Function dieser drei Veränderlichen verstehen, deren Glieder in Bezug auf diese Veränderlichen vom $r$ten Grade sind, und wo also $F_0(x,y,z)$ einer Constanten gleichbedeutend ist. Indem wir wieder die Summenbezeichnung anwenden, läfst sich jene Gleichung kürzer so schreiben:

$$2. \quad \Sigma F_a(x,y,z) = 0.$$

Als Bedingungsgleichung für die Lage der Puncte P, S, Q in einer Ge-

---

duct aus mehren Combinationsclassen der Wurzeln multiplicirt sich vorstellt: eine Verallgemeinerung, welche ich in der Schlufsbemerkung versucht habe.

*) Es ist hier keinesweges nothwendig, die Bedingung, dafs a nur alle ganzen Werthe von 0 bis n darstelle, noch als eine besondere Bedingungsgleichung hinzuzufügen, indem der Ausdruck $(s_1 \dots s_n)^{\cdot a}$ für alle andern Werthe von a von selbst verschwindet.

den haben wir wieder, wenn x', y', z' die Richtstücke des Punctes Q in Bezug auf dieselben Richt-Axen bezeichnen:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{s}{q}, \text{ oder}$$

$$3. \quad x = \frac{s}{q}x'; \quad y = \frac{s}{q}y'; \quad z = \frac{s}{q}z'.$$

Diese Werthe in die Gleichung 2. substituirt, geben

$$4. \quad \Sigma s^a \frac{F_a(x', y', z')}{q^a} = 0.$$

Wenn nun, wie wir voraussetzen, die Gleichung (2.) vom $n$ten Grade ist, so ist es auch diese Gleichung (4.) in Bezug auf s. Die n Wurzeln dieser Gleichung $s_1 \ldots . s_n$, oder vielmehr die daraus gebildeten Combinationsclassen sind nun in (1.) zu substituiren. Es ist, wenn man wieder für einen Augenblick den Coëfficienten von s^a in dieser Gleichung durch a_a bezeichnet,

$$\overset{\cdot}{(s_1 \ldots . s_n)}^{n-a} = \frac{a_a}{a_n}(-1)^{n-a}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (1.), multiplicirt dann die ganze Gleichung mit a_n und setzt statt a_a seinen Werth $\frac{F_a(x', y', z')}{q^a}$, so ergiebt sich

$$5. \quad \Sigma \alpha_a F_a(x', y', z')(-1)^{n-a} = 0; \quad \text{d. h.}$$

$$\alpha_n F_n(x', y', z') - \alpha_{n-1} F_{n-1}(x', y', z') + \ldots . (-1)^{n-1} \alpha_1 F_1(x', y', z') + (-1)^n \alpha_0 F_0(x', y', z') = 0,$$

als Ortsgleichung für den Punct Q. Diese Gleichung ist im allgemeinsten Falle vom $n$ten Grade; aber ihr Grad kann sich beliebig verringern, wenn irgend eine Anzahl von den Coëfficienten α_n, α_{n-1}, ..., von α_n an gerechnet, 0 wird. Werden z. B: von den Coëfficienten alle diejenigen, deren Zeiger gröfser als m ist, gleich 0 gesetzt, so sind die Gleichungen (1.) und (5.) nur noch vom $m$ten Grade. Die Resultate der ganzen Entwickelung können wir in folgenden Satz zusammenstellen:

„Wenn man von einem festen Punct P aus durch eine feste Oberfläche $n$ter Ordnung eine bewegliche Gerade zieht, welche dieselbe in den n Puncten S_n .... S_n schneidet, und dann auf dieser Geraden einen oder mehre Puncte Q durch eine Gleichung (1.) bestimmt, welche nach Potenzen von PQ in der Art fortschreitet, dafs jede $r$te Potenz von PQ mit der ergänzenden, d. h. $(n-r)$ten Combinationsclasse aus den Entfernun-

gen $PS_1 \ldots . PS_n$ (die Elemente multiplicirt, die Combinationen addirt) und einen willkürlichen constanten Coëfficienten α, multiplicirt ist: so ist der Ort des Punctes Q, sobald man P zum Durchschnittspunct der Richt-Axen macht, durch eine Gleichung (5.) bestimmt, welche man aus der ursprünglichen Gleichung (2.) der Oberfläche dadurch gewinnt, dafs man jedes Glied der letzteren mit demjenigen Coëfficienten aus (1.) multiplicirt, dessen zugehöriger Potenz-Exponent dem Grade dieses Gliedes gleich ist, das Zeichen aber unverändert lässt, oder entgegengesetzt nimmt, je nachdem der Grad dieses Gliedes einen geraden, oder ungeraden Werth hat*)."

So sind wir nun zwar zu einem sehr allgemeinen Resultate gelangt: dasselbe hat aber noch wegen der Unbestimmtheit der Coëfficienten α keine individuelle Bedeutung, und es fehlt ihm noch an dem wesentlichen Princip, welches jedes Allgemeine allein fruchtreich zu gestalten vermag.

§. 3. Individuelle Gestaltung des allgemeinen Resultats.

Um das allgemeine Resultat fruchtbringend zu individualisiren, müssen wir eine Bestimmung der Coëfficienten α versuchen, welche die wesentlichsten und einfachsten Beziehungen auffafst; wobei wir uns aber wiederum durch die Beziehung zwischen vier harmonischen Puncten leiten lassen. Nämlich sind S_1 und S_2, P und Q die beiden harmonischen Punctenpaare, so liefs sich die harmonische Beziehung derselben ausdrücken durch die Gleichung

$$\frac{QS_1}{PS_1} + \frac{QS_2}{PS_2} = 0.$$

Es ist klar, dafs hier, wenn S_1 und S_2 in einen Punct S zusammenfallen, die Gleichung in $QS = 0$ sich verwandelt; d. h. Q fällt alsdann in denselben Punct S. Halten wir nun diese Beziehung auch für den allgemeinen Fall fest, dass nämlich, wenn die Puncte $S_1 \ldots . S_n$ alle in einen Punct S zusammenfallen, dann auch die Puncte Q, deren Anzahl m sein mag, alle in denselben Punct S fallen, so gelangen wir sogleich zu einer Bestimmung sämmtlicher Coëfficienten α, sobald die Anzahl m der Puncte Q gegeben ist; und in der That lässt sich kaum eine einfachere Beziehung zwischen jenen Puncten denken**). Die Gleichung (1.) verwandelt sich für den Fall, dafs alle Puncte $S_1 \ldots . S_n$ in einen Punct S zusammenfallen, in

$$\Sigma \alpha_a \dot{n}^a PS^{n-a} PQ^a = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma \alpha_a \dot{n}^a s^{n-a} q^a = 0,$$

*) Es versteht sich von selbst, dafs der Satz eben so für ebene Curven gilt.

**) Auch ist dies offenbar die einzige Annahme, bei welcher Projectivität statt finden kann (vergl. §. 4.).

wo $n^{\cdot\alpha}$ die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur αten Classe, also die Zahl $\frac{n(n-1)\dots(n-\alpha+1)}{1.2\dots\alpha}$ bezeichnet. Nämlich da $s_1 = s_2 = \dots$ $\dots = s_n = s$ ist, so verwandelt sich $(s_1 \dots s_n)^{\cdot n-\alpha}$ in $n^{\cdot n-\alpha} s^{n-\alpha}$, wo statt $n^{\cdot n-\alpha}$ das ihm gleiche $n^{\cdot\alpha}$ gesetzt werden kann. Soll es nun m Puncte Q, d. h. m Werthe von PQ oder q geben, so mufs die letzte Gleichung in Bezug auf q vom $m$ten Grade, d. h. α_α mufs, so lange α gröfser als m ist, gleich 0 sein. Sollen ferner diese m Puncte Q alle in S fallen, d. h. sollen die m Wurzelwerthe für q alle gleich s sein, so können wir wieder von der Relation zwischen den Coëfficienten einer Gleichung und den Combinationsclassen der Wurzeln Gebrauch machen. Bezeichnen wir wieder für einen Augenblick den Coëfficienten von q^α in obiger Gleichung durch a_α, so ist, da der Grad der Gleichung m ist, die $(m-\alpha)$te Combinationsclasse der Wurzeln gleich $\frac{a_\alpha}{a_m}(-1)^{m-\alpha}$. Da hier alle m Wurzeln gleich s sein sollen, so ist die $(m-\alpha)$te Combinationsclasse der Wurzeln gleich $m^{\cdot m-\alpha} s^{m-\alpha}$ oder gleich $m^{\cdot\alpha} s^{m-\alpha}$. Substituiren wir nun auch die Werthe von a_α und a_m aus obiger Gleichung, so ergiebt sich

$$m^{\cdot\alpha} s^{m-\alpha} = \frac{\alpha_\alpha n^{\cdot\alpha} s^{n-\alpha}}{\alpha_m n^{\cdot m} s^{n-m}}(-1)^{m-\alpha},$$

$$\text{d. h. } \alpha_\alpha = \frac{m^{\cdot\alpha}}{n^{\cdot\alpha}} \alpha_m n^{\cdot m}(-1)^{m-\alpha};$$

wodurch die Coëfficienten der Gleichung (1.) bestimmt sind. Substituirt man nämlich den gefundenen Werth in die Gleichung (1.), und dividirt mit dem gemeinschaftlichen Factor $\alpha_m n^{\cdot m}$, so erhält man

$$\text{I. } a. \qquad \Sigma \frac{m^{\cdot\alpha}}{n^{\cdot\alpha}}(s_1 \dots s_n)^{\cdot n-\alpha} q^\alpha (-1)^{m-\alpha} = 0;$$

und substituirt man denselben Werth in die Endgleichung (5.), so erhält man, nachdem man dieselbe wieder mit $\alpha_m n^{\cdot m}(-1)^m$ multiplicirt hat,

$$\text{V. } a. \qquad \Sigma \frac{m^{\cdot\alpha}}{n^{\cdot\alpha}} F_n(x'y'z') = 0.$$

Wir sind also zu dem Resultate gelangt, dafs, wenn die Gleichung (I. *a.*) die Lage der Puncte Q in der von P aus durch die Oberfläche gezogenen Geraden bestimmt, dann die Gleichung (V. *a.*) die Ortsgleichung des Punctes Q ist. Ist insbesondere $m = 1$, so haben wir in (I. *a.*) nur zwei Werthe

für α, nämlich $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ anzunehmen, indem für jeden andern Werth von α die Combinationszahl $\dot{m}^{\alpha}$, d. h. hier $\dot{1}^{\alpha}$, gleich 0 wird. Man hat also für diesen Fall

$$\frac{1}{n}(s_1 \ldots . s_n)^{\cdot n-1} q - (s_1 \ldots . s_n)^{\cdot n} = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{n}(s_1 \ldots . s_n)^{\cdot n}$, so erhält man

$$\frac{n}{q} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \ldots . + \frac{1}{s_n}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{n}{PQ} = \frac{1}{PS_1} + \frac{1}{PS_2} + \ldots . + \frac{1}{PS_n}.$$

Es ist sonach der Punct Q für diesen Fall nichts anderes, als was *Poncelet* das Centrum der harmonischen Mittel der Puncte $S_1 \ldots . S_n$ in Bezug auf den Punct P nennt*). Wir ändern diese Benennung, um sie auf den allgemeinen Fall anwenden zu können, dahin ab, dafs wir Q die harmonische Mitte zwischen $S_1 \ldots . S_n$ in Bezug auf P nennen; fällt insbesondere P ins Unendliche, so nennen wir jenen Punct Q schlechthin die Mitte zwischen den Puncten $S_1 \ldots . S_n$**). Für den allgemeineren Fall nun nennen wir die durch die Gleichung I. *a.* bestimmten Puncte Q die harmonischen Mitten $m$ter Ordnung zwischen jenen Puncten $S_1 \ldots . S_n$ in Bezug auf P, und bemerken nur noch, dafs die wesentliche Bedeutung dieser Puncte Q, welche in der Gleichung (I. *a.*) noch verhüllt liegt, erst im folgenden Paragraph ans Licht treten wird***). Nehmen wir nun einen Punct P und eine Oberfläche an, und ziehen von P beliebige Strahlen, so nennen wir die auf den Punct P bezüglichen harmonischen Mitten zwischen den Durchschnittspuncten eines jeden solchen Strahles und der Oberfläche, zugleich die zu der Oberfläche gehörigen harmonischen Mitten $m$ter Ordnung in Bezug auf P, und den geometrischen Ort derselben die $m$te Centrale der Oberfläche in Bezug auf P. Vermittelst dieser Benennungen, welche der ganzen folgenden Abhandlung zu Grunde liegen, lässt sich das allgemeine Resultat in folgendem Satz aussprechen:

---

*) In seinem *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*, welches im dritten Bande dieses Journals abgedruckt ist.

**) Dieser Punct ist, wie sich später zeigen wird, der Punct der mittleren Entfernung zwischen jenen Puncten. Wenn wir ihn hier die Mitte nennen, so gewinnen wir den für die Verallgemeinerung unerläfslichen Vortheil einer kürzeren Bezeichnung, ohne den einer unzweideutigen und sprachgemäfsen Benennung aufzugeben.

***) Danach würde also für jenen Fall, wo $m = 1$ war, noch der Zusatz „erster Ordnung“ hinzukommen müssen: doch kann dieser Zusatz, wenn es nicht auf den Gegensatz ankommt, um so eher weggelassen werden, da die erste Ordnung auch meist schon durch die Singularform angedeutet wird.

„Die *m*te Centrale einer Oberfläche *n*ter Ordnung in Bezug auf einen festen Punct *P*, d. h. der Ort eines Punctes *Q*, welcher in einer von *P* aus gezogenen, die Oberfläche in den Puncten $S_1 \dots S_n$ schneidenden, beweglichen Geraden dergestalt liegt, dass die Gleichung (I. *a.*)

$$\Sigma \frac{m^{\cdot a}}{n^{\cdot a}} (PS_1 \dots PS_n)^{\dot{}n-a} PQ^a (-1)^{m-a} = 0$$

genügt wird, ist eine Oberfläche *m*ter Ordnung; und zwar ist, wenn die gegebene Oberfläche (*P* zum Axendurchschnitt genommen) durch die Gleichung (2.)

$$\Sigma F_a(x, y, z) = 0$$

dargestellt wird, die Gleichung (V. *a.*) der *m*ten Centrale folgende:

$$\Sigma \frac{m^{\cdot a}}{n^{\cdot a}} F_a(x, y, z) = 0.\text{“}$$

Die specielle Form dieses Satzes für $m = 1$ wird, da dann (V. *a.*) in

$$F_1(x, y, z) + nF_0(x, y, z) = 0$$

sich verwandelt, folgende sein:

„Die erste Centrale einer Oberfläche *n*ter Ordnung in Bezug auf einen festen Punct *P*, d. h. der Ort eines Punctes *Q*, welcher in einer von *P* aus gezogenen, die Oberfläche in den Puncten $S_1 \dots S_n$ schneidenden beweglichen Geraden dergestalt liegt, dafs der Gleichung

$$\frac{n}{PQ} = \frac{1}{PS_1} + \frac{1}{PS_2} + \dots + \frac{1}{PS_n}$$

genügt wird, ist eine Ebene; und zwar wird die Gleichung derselben (wenn *P* zum Axendurchschnitt gemacht ist) aus der der gegebenen Oberfläche dadurch gefunden, dafs man in der letzteren alle Glieder von einem höheren Grade als dem ersten wegläfst und das constante Glied mit *n* multiplicirt.“

Da man jedes System von *n* Ebenen als Oberfläche *n*ter Ordnung ansehen kann, so ist eine specielle Folgerung dieses speciellen Satzes der von *Poncelet* in dem angeführten Mémoire aufgestellte Satz, nämlich, dafs, wenn man von einem festen Punct durch ein System von Ebenen beliebige Strahlen zieht und auf jedem Strahl zwischen seinen Durchschnittspuncten mit jenen Ebenen die harmonische Mitte (erster Ordnung) in Bezug auf jenen festen Punct nimmt, diese Mitten alle in einer und derselben Ebene liegen. Und auch die übrigen in jenem Mémoire aufgestellten Sätze erscheinen als

specielle Fälle jenes Satzes, wenn man auf ihn das Princip der Reciprocität anwendet; wie sich späterhin (§. 8.) zeigen wird. Auch deutet *Poncelet* in jenem Mémoire (pag. 253) darauf hin, dafs die dort mitgetheilten Beziehungen einer Uebertragung auf die Theorie der Curven und Oberflächen fähig seien. Diese Uebertragung ist nun in dem vorhin aufgestellten speciellen Satze vollzogen. Aber dieser specielle Satz selbst zeigt sich erst in seiner vollen Bedeutung, und die Menge der Beziehungen, welche er darbietet, tritt erst hervor, wenn er als specieller Fall jenes allgemeinen Satzes aufgefafst wird. Doch müssen wir, um alle diese Beziehungen und Folgerungen auf die leichteste und einfachste Weise ableiten zu können, den allgemeinen Satz dadurch vereinfachen, dafs wir die Gleichung (I. *a.*), welche für den Fall, dafs $m = 1$ war, eine so einfache Gestalt annahm, auch für den allgemeinen Fall auf eine gleich einfache Form bringen.

§. 4. Darstellung des Hauptlehrsatzes für die Theorie der Centralen in seiner einfachsten Form.

Zu der beabsichtigten Vereinfachung mag folgende Bemerkung leiten, welche auch an sich nicht ohne Interesse ist. Schon *Poncelet* hat gezeigt, wie die durch die Gleichung (I. *a.*) für den Fall $m = 1$ dargestellte Relation eine projectivische ist, d. h. durch beliebige Projection der Puncte, auf welche sie sich bezieht, nicht geändert wird. Daraus läfst sich, wie aus manchen anderen Umständen, vermuthen, dafs jene Relation auch im allgemeinen Falle eine projectivische sein werde. Um diese Vermuthung zur Gewifsheit zu bringen, und dabei zugleich zu der bezweckten Vereinfachung zu gelangen, wollen wir die allgemeine Form solcher Gleichungen, welche eine projectivische Relation darstellen, ausmitteln, und dann nachweisen, dafs die Gleichung (I. *a.*) diese Form hat. Wir setzen als bekannt voraus, dafs, wenn man in einer Ebene von einem festen Puncte A aus beliebige feste Strahlen $\alpha_1 \dots\dots \alpha_n$ zieht und durch dieselben eine bewegliche Gerade legt, welche jene Strahlen beziehlich in den Puncten $B_1 \dots\dots B_n$ schneidet, allemal folgendes Doppelverhältnifs zwischen beliebigen vier Puncten, z. B. B_1, B_2, B_3, B_4, constant ist:

$$\frac{B_1 B_2}{B_1 B_3} : \frac{B_4 B_2}{B_4 B_3}.$$

Daraus folgt, dafs auch jede Function dieses Doppelverhältnisses in der

Projection constant bleiben mufs; und auch umgekehrt, dafs, wenn irgend eine Function der Entfernungen zwischen den Puncten einer Geraden in der Projection constant bleibt, jene Function sich als Function solcher Doppelverhältnisse darstellen lassen mufs; nämlich so, dafs sie aufser diesen Doppelverhältnissen nur constante Gröfsen enthält. Es seien nun P, Q, $S_1 \dots S_n$ Puncte einer Geraden, zwischen denen eine projectivische Relation statt findet. Dann mufs sich die Gleichung, welche diese Relation ausdrückt, wenn wir, was immer möglich ist, P, Q, S_1 jedesmal als drei von den vier Puncten annehmen, zwischen welchen das Doppelverhältnifs statt findet, in der Form darstellen lassen:

$$f\left(\frac{QS_2}{PS_2}:\frac{QS_1}{PS_1},\ \frac{QS_3}{PS_3}:\frac{QS_1}{PS_1},\ \dots\ \frac{QS_n}{PS_n}:\frac{QS_1}{PS_1}\right) = 0,$$

wo f das Zeichen einer beliebigen Function ist. Es sei diese Function eine algebraische vom $m$ten Grade, so wird man durch Multiplication mit $\left(\frac{QS_1}{QS_1}\right)^m$ eine homogene Function vom $m$ten Grade aus den einfachen Quotienten erhalten; also wird jene Gleichung sich in der Form darstellen lassen:

$$F_m\left(\frac{QS_1}{PS_1}\ \dots\ \frac{QS_n}{PS_n}\right) = 0,$$

wo wieder F_m das Zeichen einer homogenen Function vom $m$ten Grade ist. Um alle Entfernungen von P aus zu haben, kann man statt QS_1, $QP+PS_1$, oder PS_1-PQ, oder, mit der schon früher gebrauchten Abkürzung, s_1-q setzen: also ist $\frac{QS_1}{PS_1} = \frac{s_1-q}{s_1} = 1-\frac{q}{s_1}$ und man erhält

$$F_m\left[\left(1-\frac{q}{s_1}\right),\ \dots\left(1-\frac{q}{s_n}\right)\right] = 0.$$

Soll also die Gleichung I. a. eine projectivische Relation darstellen, so mufs sie sich, da sie zugleich in Bezug auf q vom $m$ten Grade ist, auf diese Form bringen lassen. Da aber (I. a.) zugleich eine Function aus den Combinationsclassen der n Entfernungen $s_1 \dots s_n$ ist, so mufs sie sich auch in einer Reihe von Gliedern darstellen lassen, deren jedes ein Product aus den Combinationsclassen der Elemente $\left(1-\frac{q}{s_1}\right)\dots\left(1-\frac{q}{s_n}\right)$ ist, multiplicirt mit irgend einem constanten Coëfficienten, und zwar mufs die Summe der Classenzahlen in jedem Gliede m sein. Dafs dies für den ersten Grad statt findet, ist unmittelbar klar; denn die erste Combinationsclasse

aus jenen Elementen ist

$$\left(1-\frac{q}{s_1}\right)+\left(1-\frac{q}{s_2}\right)+\ldots\left(1-\frac{q}{s_n}\right) \text{ oder } n-\frac{q}{s_1}-\frac{q}{s_2}\ldots-\frac{q}{s_n}.$$

Dies giebt, gleich 0 gesetzt und mit q dividirt, die Gleichung

$$\frac{n}{q}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\ldots+\frac{1}{s_n}.$$

Für den ersten Grad ist also die Projectivität der Gleichung I. *a.* nachgewiesen. Um sie auch für den $m$ten Grad nachzuweisen, ist zuerst irgend eine, z. B. die $r$te Combinationsclasse jener Elemente $\left(1-\frac{q}{s_1}\right)$ u. s. w., nach Potenzen von q zu entwickeln. Es findet sich

$$\left[\left(1-\frac{q}{s_1}\right)\ldots\left(1-\frac{q}{s_n}\right)\right]^{\cdot r} = \Sigma(-1)^{\alpha}(n-\alpha)^{\cdot r-\alpha}\left(\frac{1}{s_1}\ldots\frac{1}{s_n}\right)^{\cdot\alpha} q^{\alpha}.$$

Denn, um bei der Entwickelung jener Combinationsclasse den Coëfficienten von q^α zu erhalten, mufs man aus $\frac{1}{s_1}\ldots\frac{1}{s_n}$ die Combinationen zur $r$ten Classe, und aus jeder wieder die zur αten nehmen; wobei man die Combinationen aus $\frac{1}{s_1}\ldots\frac{1}{s_n}$ zur αten Classe und zwar jede so oft erhält, als es Combinationen aus $(n-\alpha)$ Elementen zur $(r-\alpha)$ten Classe giebt: letzteres nämlich deshalb, weil jede Combination zur αten Classe so oft vorkommen mufs, als es verschiedene Arten giebt, diese Combination zu einer der $r$ten Classe zu ergänzen, und dies offenbar auf so viele Arten geschehen kann, als es Combinationen aus den noch übrigen $(n-\alpha)$ Elementen zu der ergänzenden, d. h. $(r-\alpha)$ten Classe giebt. Dafs das Zeichen durch den Factor $(-1)^\alpha$ dargestellt wird, ist an sich klar. Aus der so eben geführten combinatorischen Entwickelung ergiebt sich zugleich unmittelbar für die combinatorischen Zahlen das Gesetz

$$n^{\cdot r}\, r^{\cdot\alpha} = n^{\cdot\alpha}(n-\alpha)^{\cdot r-\alpha};\quad \text{also ist } (n-\alpha)^{\cdot r-\alpha}=\frac{n^{\cdot r}\, r^{\cdot\alpha}}{n^{\cdot\alpha}}.$$

Substituirt man den letzteren Ausdruck in den gefundenen Ausdruck für die $r$te Combinationsclasse, so ergiebt sich

$$\Sigma(-1)^\alpha \frac{n^{\cdot r}\, r^{\cdot\alpha}}{n^{\cdot\alpha}}\left(\frac{1}{s_1}\ldots\frac{1}{s_n}\right)^{\cdot\alpha}q^\alpha.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Gleichung (I. *a.*), so zeigt sich leicht die vollkommene Uebereinstimmung, wenn man in jenen Ausdruck m statt r einführt, und ihn gleich 0 setzt. In der That: multiplicirt man die Gleichung

$$\Sigma(-1)^{\alpha}\frac{n^{\cdot m}\,m^{\cdot \alpha}}{n^{\cdot \alpha}}\left(\frac{1}{s_1}\;\ldots\;\frac{1}{s_n}\right)^{\cdot \alpha} q^{\alpha} = 0$$

mit $\frac{s_1 \cdot s_2 \cdots s_n}{n^{\cdot m}}$, so erhält man die Gleichung (I. *a.*) unmittelbar, nämlich

$$\Sigma(-1)^{\alpha}\frac{m^{\cdot \alpha}}{n^{\cdot \alpha}}(s_1 \ldots s)^{\cdot n-\alpha} q^{\alpha} = 0.$$

Daraus folgt, dafs die Gleichung (I. *a.*) in der That eine projectivische Relation darstellt, und dafs sie durch die Gleichung

$$\text{I. } b. \quad \left[\left(1-\frac{q}{s_1}\right)\ldots\left(1-\frac{q}{s_n}\right)\right]^{\cdot m} = 0$$

ersetzt wird, statt welcher man, indem man wieder statt $1-\frac{q}{s_1}$, $\frac{QS_1}{PS_1}$ u. s. w. setzt, auch schreiben kann:

$$\text{I. } b. \quad \left(\frac{QS_1}{PS_1}\;\ldots\;\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m} = 0:$$

eine Gleichung, welche höchst einfach ist, und welche sich für $m = 1$ in

$$\frac{QS_1}{PS_1}+\frac{QS_2}{PS_2}+\ldots+\frac{QS_n}{PS_n} = 0$$

verwandelt. Noch ist zu bemerken, dafs sich auch der Gleichung V. *a.* eine in vielen Fällen bequemere Form geben läfst. Multiplicirt man dieselbe mit $n^{\cdot m}$, so kann man statt $\frac{n^{\cdot m}\,m^{\cdot \alpha}}{n^{\cdot \alpha}}$, nach dem vorher erwiesenen combinatorischen Gesetz, auch $(n-\alpha)^{\cdot m-\alpha}$ setzen und erhält dann

$$\text{V. } \quad \Sigma(n-\alpha)^{\cdot m-\alpha}F_{\alpha}(x', y', z') = 0,$$

für die einfachste Form der Ortsgleichung für Q. Das ganze Ergebnifs der bisherigen Untersuchung läfst sich nun in dem folgenden Satze aufstellen, welcher die gröfste Einfachheit mit der gröfsten Allgemeinheit verbindet und den Hauptsatz unserer Theorie bildet:

„Wenn man von einem festen Punct P *durch eine feste Oberfläche* n*ter Ordnung eine bewegliche Gerade zieht, welche die Oberfläche in den Puncten* $S_1 \ldots S_n$ *schneidet, und auf dieser Geraden einen Punct* Q *so annimmt, dafs die Summe aus sämmtlichen Producten zu* m *Factoren, welche sich aus den Quotienten der Entfernungen jedes Durchschnittspunctes von dem Puncte* P *einerseits und dem Puncte* Q *andrerseits bilden lassen, gleich* 0 *ist, so ist der geometrische Ort des Puncts* Q *eine Oberfläche* m*ter Ordnung; und zwar erhält man, wenn* P *zum Axen-*

durchschnitt gemacht ist, die Gleichung derselben aus der der Oberfläche dadurch, dafs man jedes Glied der letztern mit einer Combinationszahl multiplicirt, deren Elementenzahl den Grad dieses Gliedes zu n, *und deren Classenzahl denselben zu* m *ergänzt.*"

Es wäre leicht gewesen, diesen Satz sogleich an die Spitze zu stellen und ihn unmittelbar zu beweisen. Wir hätten zu dem Ende nur den rückgängigen Weg einschlagen und von der Gleichung (I.), welche zur Definition der harmonischen Mitten *m*ter Ordnung dient, auf (I. *b.*) und dann auf (I. *a.*) zurückgehen und vermittelst dieser Gleichung den Beweis nach der in §. 2. befolgten Methode führen dürfen. Wir haben den freilich etwas weitläuftigeren, aber, wie es scheint, fruchtreicheren Weg der Schritt für Schritt fortgehenden Entwickelung vorgezogen, indem es ja weniger auf das einzelne Ergebnifs, als auf die Darstellung allgemeiner und fruchtbarer Erweiterungsmethoden ankommt.

Wir gehen nun zu den Folgerungen aus diesem Satze über, und werden zuerst den Zusammenhang der verschiedenen Centralen, welche zu derselben Oberfläche und demselben Puncte P gehören, darstellen, und dann die besonderen Fälle ins Auge fassen.

§. 5 Zusammenhang zwischen den Centralen eines Systems und zwischen Centrale und Polare.

Nimmt man die sämmtlichen auf einen Punct bezüglichen Centralen einer Oberfläche *n*ter Ordnung, wobei sich diese Oberfläche selbst als *n*te Centrale ansehen läfst, so bilden dieselben ein System von Centralen. welches eine Reihe merkwürdiger und einfacher Beziehungen darbietet, von welchen wir die wesentlichsten hervorheben wollen *).

Nämlich, stellt man die Gleichungen zweier solcher Centralen, z. B. der *m*ten und *r*ten, in der Form V. *a.* auf, so erhält man:

$$\Sigma \frac{\dot{m}^{a}}{\dot{n}^{a}} F_a(x, y, z) = 0 \quad \text{für die } m\text{te Centrale und}$$

$$\Sigma \frac{\dot{r}^{a}}{\dot{n}^{a}} F_a(x, y, z) = 0 \quad \text{für die } r\text{te Centrale;}$$

*) Setzt man nämlich in der Gleichung V. $m = n$, so erhält man, da $(\dot{n-a})^{m-a} = 1$ ist, die ursprüngliche Gleichung der Oberfläche wieder; auch ist aus der Gleichung I. klar, wie dann die n Puncte Q mit den n Puncten S zusammenfallen.

wenn nämlich der Punct P zum Axendurchschnitt gemacht wird und die Gleichung der gegebenen Oberfläche

$$\Sigma F_a(x, y, z) = 0$$

ist. Vergleicht man jene beiden Gleichungen, so leuchtet sogleich ein, dafs, wenn r kleiner ist als m, die $r$te Centrale zugleich Centrale der durch die $m$te dargestellten Oberfläche ist, und zwar in Bezug auf denselben Punct P, weil nämlich $\frac{\dot{r}^a}{\dot{m}^a}\cdot\frac{\dot{m}^a}{\dot{n}^a} = \frac{\dot{r}^a}{\dot{n}^a}$ ist. Nimmt man also in Bezug auf einen Punct die $m$te Centrale einer Oberfläche $n$ter Ordnung, und von dieser Centrale wieder in Bezug auf denselben Punct die $r$te, so ist die letztere zugleich die $r$te Centrale der gegebenen Oberfläche in Bezug auf denselben Punct, oder:

„In jedem System von Centralen, in Bezug auf einen Punct, ist jede derselben zugleich Centrale aller höheren Centralen, in Bezug auf denselben Punct."

Da ferner ein System von Centralen in Bezug auf einen Punct P von jeder durch diesen Punct gezogenen Geraden in Puncten geschnitten wird, welche in demselben Sinne ein System harmonischer Mitten bilden, so ergiebt sich zugleich folgender Satz:

„Nimmt man die harmonischen Mitten aller Ordnungen zwischen n Puncten einer Geraden, in Bezug auf einen Punct P derselben Geraden, so sind die harmonischen Mitten irgend einer Ordnung nicht nur dergleichen für die gegebenen n Puncte, sondern auch für jede Reihe von Puncten, welche harmonische Mitten höherer Ordnung zwischen denselben n Puncten sind; und zwar wiederum alles in Bezug auf denselben Punct genommen."

Es entsteht nun die Aufgabe: wenn der Punct Q fest ist, den Ort des Punctes P, welchen wir Pol nennen, zu finden; oder zunächst die Aufgabe: zwischen n Puncten $S_1 \dots S_n$ einer Geraden, in Bezug auf einen Punct Q derselben Geraden, den Pol $m$ter Ordnung P, d. h. denjenigen Punct P zu finden, in Bezug auf welchen Q eine harmonische Mitte $m$ter Ordnung ist.

Man hatte für die Beziehung zwischen P und Q die Gleichung

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1}, \dots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\dot{m}} = 0.$$

Multiplicirt man dieselbe mit $\frac{PS_1}{QS_1}\cdot\frac{PS_2}{QS_2} \dots \frac{PS_n}{QS_n}$, so erhält man unmittelbar

$$\left(\frac{PS_1}{QS_1} \dots \frac{PS_n}{QS_n}\right)^{\dot{n-m}} = 0.$$

Es giebt also, da diese Gleichung in Bezug auf P, oder vielmehr in Bezug auf QP, von der $(n-m)$ten Ordnung ist, $(n-m)$ Pole $m$ter Ordnung zwischen $S_1 \dots . S_n$ in Bezug auf P; namentlich giebt es zwischen n Puncten einer Geraden $n-1$ Pole erster Ordnung in Bezug auf einen Punct Q (worauf schon *Poncelet* hingedeutet hat *)), aber nur einen Pol $(n-1)$ter Ordnung. Da ferner die zuletzt entwickelte Gleichung, wenn man P und Q vertauscht, die Gleichung für die harmonischen Mitten $(n-m)$ter Ordnung ist, so hat man folgenden interessanten Satz:

„Die Pole $m$ter Ordnung zwischen einer gegebenen Reihe von n Puncten in einer Geraden, in Bezug auf einen Punct in derselben Geraden, sind identisch mit den harmonischen Mitten $(n-m)$ter Ordnung zwischen denselben Puncten und in Bezug auf denselben Punct."

Ziehen wir nun von einem festen Punct Q durch eine feste Oberfläche $n$ter Ordnung eine bewegliche Gerade, und nehmen auf derselben die Pole $m$ter Ordnung zwischen ihren n Durchschnittspuncten mit jener Oberfläche, in Bezug auf den festen Punct Q, so soll der geometrische Ort dieser Pole die $m$te Polare der gegebenen Oberfläche in Bezug auf Q heifsen. Wir sind demnach zu folgendem wichtigen Resultate gelangt:

„*Die* m*te Polare einer Oberfläche* n*ter Ordnung, in Bezug auf einen Punct, ist identisch mit der* $(n-m)$*ten Centrale derselben Oberfläche in Bezug auf denselben Punct.*"

Ist daher die Oberfläche von der Ordnung $2n$, so ist ihre $n$te Polare mit ihrer $n$ten Centrale, beide in Bezug auf denselben Punct genommen, identisch; also ist für Oberflächen oder Curven zweiter Ordnung die erste Polare mit der ersten Centrale, beide in Bezug auf denselben Punct genommen, oder schlechtweg die Polare mit der Centrale, identisch, da es für solche Oberflächen oder Curven in Bezug auf einen Punct nur eine Centrale und Polare giebt **). Es stimmt also, was nach dem Princip der obigen Entwickelung Polare genannt wurde, in Bezug auf einen Kegelschnitt, mit dem üblichen Begriff der Polare überein.

Für die erste Centrale und die erste Polare lassen sich aus dem letzten Satze leicht folgende Beziehungen ableiten, wenn man sich für das Verständnifs derselben daran erinnert, dafs jeder Centrale ein Pol, in Bezug

*) In dem mehrfach citirten Mémoire.

**) Die Curven haben wir bei den vorhergehenden Sätzen weggelassen, da für sie stets dasselbe gilt, wie für die Oberflächen.

auf welchen sie genommen ist, und in demselben Sinne jeder Polare eine harmonische Mitte zugeordnet ist.

1. „Jede Ebene kann als erste Centrale einer gegebenen Oberfläche $n$ter Ordnung angesehen werden und hat als solche $(n-1)^3$ ihr zugeordnete Pole."

Denn nimmt man einen Punct Q in derselben an, so ist der Ort aller Pole, in Bezug auf welche jener Punct eine der Oberfläche angehörende harmonische Mitte erster Ordnung ist, die erste Polare der Oberfläche in Bezug auf Q. Nimmt man nun 3 solche Puncte in jener Ebene an, so erhält man auch in Bezug auf sie drei erste Polaren, welche sich, da jede derselben eine Oberfläche $(n-1)$ter Ordnung ist, in $(n-1)^3$ Puncten schneiden. Diese Durchschnittspuncte sind also die einzigen, in Bezug auf welche die 3 Puncte zugleich harmonische Mitten erster Ordnung sind; und da zugleich der Ort dieser Mitten in Bezug auf jeden der genannten Durchschnittspuncte eine Ebene, diese aber durch 3 Puncte bestimmt ist, so ist die gegebene Ebene erste Centrale der Oberfläche in Bezug auf jeden der erwähnten $(n-1)^3$ Durchschnittspuncte; aber auch in Bezug auf keinen anderen Punct.

2. Eben so ergiebt sich Folgendes für ebene Curven:

„Jede Gerade in der Ebene einer Curve $n$ter Ordnung kann als erste Centrale derselben angesehen werden und hat als solche $(n-1)^2$ zugeordnete Pole."

3. Aus der ersten Beziehung (1.) folgt wieder unmittelbar:

„Alle ersten Polaren einer Oberfläche $n$ter Ordnung schneiden sich, wenn die ihnen zugeordneten harmonischen Mitten in einer und derselben Ebene liegen, in denselben $(n-1)^3$ Puncten, welche die jener Ebene zugeordneten Pole sind."

4. Und eben so folgt aus der zweiten Beziehung:

„Alle ersten Polaren einer Curve $n$ter Ordnung schneiden sich, wenn die ihnen zugeordneten harmonischen Mitten in einer und derselben Geraden liegen, in denselben $(n-1)^2$ Puncten, welche die jener Geraden zugeordneten Pole sind."

5. Aus jener ersten Beziehung läfst sich endlich noch Folgendes darthun:

„Alle ersten Polaren einer Oberfläche $n$ter Ordnung haben, wenn die ihnen zugeordneten harmonischen Mitten in einer und derselben Geraden liegen, eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve, welche der Ort der Pole ist, die den durch jene Gerade gelegten Ebenen zugeordnet sind."

Man nehme in der That zwei Puncte jener Geraden. Die Durchschnittscurve, in welcher sich die jenen beiden Puncten zugeordneten ersten Polaren der gegebenen Oberfläche schneiden, wird der Ort sein für alle jenen Puncten in Bezug auf die gegebene Oberfläche zugeordneten Pole erster Ordnung, und wir haben also nur zu zeigen, dafs die einem solchen Punctenpaare auf diese Weise zugeordneten Pole mit den jedem andern Punctenpaare derselben Geraden auf gleiche Weise zugeordneten Polen identisch sind, d. h. dafs die ersteren Pole zugleich es sind in Bezug auf alle Puncte dieser Geraden. Betrachtet man nun in der That die sämmtlichen Pole erster Ordnung, welche zweien Puncten jener Geraden zugleich zugeordnet sind, so werden die ersten Centralen aller dieser Pole durch die beiden angenommenen Puncte gehen und werden also, da die ersten Centralen Ebenen sind, jene Gerade zur gemeinschaftlichen Durchschnittslinie haben; d. h. alle jene Pole werden, als Pole erster Ordnung, allen Puncten dieser Geraden zugeordnet sein; was noch zu zeigen übrig blieb.

Diesem Satze, welcher für Tangential-Ebenen einer Oberfläche, wie sich später zeigen wird, wichtig ist, entspricht kein Satz für ebene Curven. —

6. Dem ersten und zweiten Satze steht in Bezug auf die erste Polare parallel der Satz:

„Jede, einer Oberfläche oder Curve $n$ter Ordnung angehörige erste Polare hat nur eine ihr zugeordnete harmonische Mitte."

Denn betrachten wir z. B. auf dieser Polare, wenn sie eine Oberfläche ist, 3 Puncte, so wird der Ort der harmonischen Mitten erster Ordnung in Bezug auf jeden dieser Puncte eine Ebene sein. Der Durchschnittspunct Q dieser drei Ebenen wird also der einzige Punct sein, welcher in Bezug auf jene 3 Puncte zugleich harmonische Mitte erster Ordnung ist. Ist daher die Oberfläche, auf welcher jene 3 Puncte genommen sind, wirklich eine erste Polare der gegebenen Oberfläche, so mufs auch jener Punct Q, und zwar er allein, die dieser Polare zugeordnete harmonische Mitte sein.

7. Hieraus folgt ferner, „dafs alle ersten Centralen einer Oberfläche oder Curve, wenn die ihnen zugeordneten Pole in einer ersten Polare derselben Oberfläche oder Curve liegen, sich in einem Punct schneiden, welcher die jener Polare zugeordnete harmonische Mitte ist."

8. Auch geht daraus zugleich hervor, dafs auch die erste Polare,

wenn die Oberfläche gegeben ist, zu welcher sie gehört, durch 3 Puncte vollkommen bestimmt wird; wie solches für die erste Centrale, da diese eine Ebene ist, an sich klar ist.

Statt diese Beziehungen auf die höheren Ordnungen der Centralen und Polaren auszudehnen, wollen wir sie nur noch auf Curven und Oberflächen zweiter Ordnung anwenden; wo sie das bekannte Gesetz der Reciprocität darstellen. Da hier nämlich die Ausdrücke Polare und Centrale, Pol und harmonische Mitte, vertauscht werden können, so verwandeln sich hier die oben dargestellten Beziehungen in folgende bekannte Sätze:

„Alle Polaren eines Kegelschnittes, deren Pole in einer Geraden liegen, schneiden sich in einem und demselben Puncte, dem Pole dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt," und

„Alle Polaren einer Oberfläche zweiter Ordnung, deren Pole in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem und demselben Puncte, dem Pole jener Ebene in Bezug auf die Oberfläche."

Und endlich:

„Alle Polaren einer Oberfläche zweiter Ordnung, deren Pole in einer Geraden liegen, schneiden sich in einer und derselben Geraden, welche wiederum zugleich der Ort der Pole für alle durch die erste gelegten Ebenen ist."

(Die Fortsetzung folgt.)

22.

Aphorismen aus der Geometrie des Raumes.*)

(Vom Herrn Professor *Plücker* zu Bonn.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 7. im 1sten Hefte dieses Bandes.)

Die Axen der Flächen zweiter Ordnung.

§. 3.

1. Nachdem wir im 1. Paragraphen die Richtung und Gröfse der Axen der durch die Gleichung:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 1$$

dargestellten Fläche zweiter Ordnung bestimmt haben, ist es leicht, die Bedingungen aufzustellen, unter welchen diese Fläche eine *Umdrehungsfläche* ist. Wir brauchen zu diesem Ende nur auszudrücken, dafs zwei der drei Axen einander gleich sind (ein Weg, den Herr *Cauchy* einschlägt), oder auch, wie wir verfahren wollen, dafs die Richtung zweier der drei Axen unbestimmt wird.

2. Indem wir eine der drei Axen durch folgende Gleichungen darstellen:

$$x = az, \quad y = bz,$$

ist ihre Richtung durch die folgenden beiden Gleichungen bestimmt:

$$1. \quad \begin{cases} (B'a + Bb + A'')a - (Aa + B''b + B') = 0, \\ (B'a + Bb + A'')a - (B''a + A'b + B) = 0. \end{cases}$$

---

*) Erst nachdem bereits die beiden ersten Paragraphen dieser Aphorismen unter der Presse waren, wurde *Moth's* deutsche Bearbeitung von *Cauchy's* lithographirtem Mémoire „Ueber die Theorie des Lichtes" versandt. Hier wird Abtheilung II. „Ueber Flächen der zweiten Ordnung" derselbe Gegenstand, aber, was zu erwarten stand, auf anderem Wege behandelt. Aus blofs persönlicher Veranlassung, die durch das Erscheinen der angeführten Schrift weggefallen ist, sind jene beiden Paragraphen für den Druck ausgewählt worden.

Auf dem jetzigen Standpuncte der Wissenschaft ist insbesondere eine neue Behandlung der Flächen zweiter Ordnung zur Reife gediehen, und gleichzeitige Bearbeiter müssen sich nothwendig in den Resultaten begegnen. Ich erlaube mir hier blofs zu erwähnen, dafs ich damit beschäftigt bin, eine systematische analytische Behandlung der krummen Oberflächen für den Druck vorzubereiten.

Mit den beiden ersten Paragraphen sind gleichzeitig zwei schöne Abhandlungen von Herrn Dr. *Hesse* in Königsberg erschienen (Bd. XXIV. Heft 1. Abth. 4. 5.). Was die erste dieser beiden Abhandlungen betrifft, so bemerke ich, dafs ich in einem ältern

Das System dieser beiden Gleichungen giebt immer drei reelle Wurzelpaare (§. 1.). Wenn aber diese Gleichungen beide einen gemeinschaftlichen Factor $(a+gb+h)$ haben, in welchem Falle sie die folgende Form mit vier unbestimmten Coëfficienten g, h, m, n annehmen müssen:

$$B'(a+gb+h)(a-m) = 0,$$
$$B'(a+gb+h)(b-n) = 0,$$

so ergiebt sich eine einzige bestimmte Axenrichtung (die Richtung der Rotations-Axe) durch die Gleichungen

$$a = m, \quad b = n,$$

während die Richtung der beiden andern (auf einander senkrechten) Axen jede beliebige sein kann, vorausgesetzt nur, dafs die entsprechenden a und b die folgende Gleichung befriedigen:

$$a+gb+h = 0.$$

Den obigen Formbestimmungen zufolge erhalten wir die nachstehende identische Gleichung:

$$[(B'a+Bb+A'')a-(Aa+B''b+B')](b-n) \equiv$$
$$[(B'a+Bb+A'')b-(B''a+A'b+B)](a-m),$$

oder, vereinfacht:

$$(B'a+Bb+A'')an+(Aa+B''b+B')(b-n) \equiv$$
$$(B'a+Bb+A'')bm+(B''a+A'b+B)(a-m);$$

und diese identische Gleichung löset sich in die nachfolgenden sechs Gleichungen auf:

$$2. \quad B'n = B'', \quad Bm = B'', \quad B'n = Bm,$$

$$3. \quad \begin{cases} Bn+A = B'm+A', \\ (A''-A)n = B-B''m, \\ B'-B''n = (A''-A')m. \end{cases}$$

Mémoire, welches damals, als die *Gergonne*schen Annales aufhörten, in den Händen ihres Herausgebers geblieben ist, unter Anderm die Aufgabe „eine Fläche zweiter Ordnung zu beschreiben, welche durch die reelle oder imaginäre Durchschnittscurve zweier gegebener Flächen (durch acht gegebene Puncte) und überdies durch einen neuen gegebenen Punct geht oder eine gegebene Ebene berührt," höchst einfach gelöset habe. Die Resultate der zweiten Abhandlung und viele andere wird man in einem von mir bereits redigirten Paragraphen meiner neuen Arbeit ohne analytische Rechnung abgeleitet finden aus der Gleichung

$$tu = vw,$$

welche, wenn t, u, v, w lineare Functionen von x, y, z bedeuten, die allgemeine Gleichung der geradlinigen Flächen der zweiten Ordnung (des hyperbolischen Hyperboloïds und des hyperbolischen Paraboloïds) ist. Zugleich knüpft sich an die letzte Form, die, wenn wir von der dritten Coordinate z abstrahiren, einen Kegelschnitt darstellt, ein Uebertragungsprincip.

Die drei Gleichungen (2.) geben übereinstimmend:

$$m = \frac{B''}{B}, \qquad n = \frac{B''}{B'},$$

und hiernach ist, indem wir diese Werthe von m und n für a und b substituiren, die Rotations-Axe durch folgende Gleichungen gegeben:

$$Bx = B'y = B''z.$$

Die drei Gleichungen (3.) kann man auf nachstehende Weise schreiben:

$$A - B'm = A' - Bn,$$
$$A - B''.\frac{m}{n} = A'' - B.\frac{1}{n},$$
$$A' - B''.\frac{n}{m} = A'' - B.\frac{1}{m},$$

und dann, indem man für m und n ihre Werthe setzt, in folgendem Ausdrucke zusammenfassen:

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

welcher somit die gesuchten beiden Bedingungen, unter welchen die gegebene Fläche eine Umdrehungsfläche ist, enthält.

3. Nachdem die Gleichungen der Umdrehungs-Axe gefunden sind, erhalten wir für die Ebene der beiden anderen Axen (der Aequatorial-Ebene), weil diese Ebene auf jener Axe senkrecht steht, folgende Gleichung:

$$\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''} = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch dann, wenn man etwa die erste der Gleichungen (1.) durch $a-m$ dividirt und dann für a und b ihre Werthe $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ setzt. Zunächst ergiebt sich, als Quotient des ersten Theils dieser Gleichung durch $a-m$:

$$B'a + Bb,$$

und als Rest:

$$(A'' - A + B'm)a + (Bm - B'')b - B',$$

der sich auf

$$\frac{BB'}{B''} - B' \equiv \frac{BB'}{B''}(a-m)$$

reducirt. Der vollständige Quotient ist also:

$$B'a + Bb + \frac{BB'}{B''} \equiv B'(a + gb + h)$$

und führt, gleich Null gesetzt, zu der vorstehenden Gleichung.

4. Wenn wir in die Gleichungen (6.) und (7.) des ersten Paragraphen für a und b diejenigen Werthe setzen, welche sich auf die Richtung der Rotations-Axe beziehen, so erhalten wir folgende dreifache Bestimmung von s, des reciproken Werthes dieser halben Axe:

$$4.\quad \begin{cases} \frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} + A'' = s^2, \\ \frac{B'B''}{B} + \frac{BB'}{B''} + A' = s^2, \\ \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''} + A = s^2. \end{cases}$$

Addirt man, so kommt

$$2\left(\frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''}\right) + A + A' + A'' = 3s^2.$$

Da ferner, indem wir den reciproken Werth einer der beiden andern unter einander gleichen Halb-Axen durch σ bezeichnen,

$$A + A' + A'' = s^2 + 2\sigma^2$$

ist, so findet sich, wenn wir abziehen und den gemeinschaftlichen Factor 2 weglassen,

$$\frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''} = s^2 - \sigma^2.$$

Eliminirt man endlich aus dieser Gleichung s^2 nach einander durch jede der drei Gleichungen (4.), so kommt

$$5.\quad \sigma^2 = A'' - \frac{BB'}{B''} = A' - \frac{BB''}{B'} = A - \frac{B'B''}{B}.$$

5. Die Bedingungsgleichungen, dafs die gegebene Fläche eine Umdrehungsfläche sei, bleiben ganz dieselben, wenn man diese Fläche, statt durch die an die Spitze dieser Nummer gestellte Gleichung, durch die folgende zwischen Plancoordinaten (§. 2.):

$$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2Buv + 2B'tv + 2B''tu = 1$$

darstellt. Es bedarf dieses keiner weiteren Erörterung, weil dieselbe Gleichung (9.) einmal (§. 1.) die reciproken Werthe der halben Axen, das anderemal diese Werthe selbst zu Wurzeln hat. Man erhält die Bestimmung der Länge der halben Rotations-Axe und der beiden halben gleichen Axen, wenn man in den vorstehenden Gleichungen (4.) und (5.) unter s und σ diese Längen selbst, und nicht, wie oben, die reciproken Werthe derselben versteht.

II. Allgemeine Methode, eine homogene Function beliebig vieler Veränderlichen in eine andere zu verwandeln, welche nur die Quadrate der Veränderlichen enthält.

§. 4.

1. Die Haupt-Aufgabe bei der Discussion der allgemeinen Gleichung vom zweiten Grade zwischen zwei und drei Veränderlichen besteht darin, aus dieser Gleichung diejenigen Glieder wegzuschaffen, welche die Producte dieser Veränderlichen enthalten. Wir wollen diese Aufgabe auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen ausdehnen, und können bei der Symmetrie der Entwickelungen die Aufgabe als gelöset betrachten, nachdem wir den Fall der allgemeinen Gleichung zwischen vier, oder der allgemeinen homogenen Gleichung zwischen fünf Veränderlichen behandelt haben.

Es sei demnach

$$\Omega = 0$$

die gegebene Gleichung und

$$\Omega \equiv Ap^2 + A_1 q^2 + A_2 r^2 + A_3 s^2 + A_4 t^2$$
$$+ 2B_{01} pq + 2B_{02} pr + 2B_{03} ps + 2B_{04} pt + 2B_{12} qr + 2B_{13} qs$$
$$+ 2B_{14} qt + 2B_{23} rs + 2B_{24} rt + 2B_{34} st.$$

Dann erhält man, wenn man durch die Gleichung:

$$p = P - a_1 q - a_2 r - a_3 s - a_4 t,$$

P statt p einführt, die vier Coëfficienten a_1, a_2, a_3, a_4 durch die Gleichungen

$$a_1 = \frac{B_{01}}{A}, \quad a_2 = \frac{B_{02}}{B}, \quad a_3 = \frac{B_{02}}{A}, \quad a_4 = \frac{B_{04}}{A}$$

bestimmt und zugleich der Kürze wegen

$$AA_1 - B_{01}^2 \equiv \Xi_1, \quad AA_2 - B_{02}^2 \equiv \Xi_2, \quad AA_3 - B_{03}^2 \equiv \Xi_3, \quad AA_4 - B_{04}^2 \equiv \Xi_4,$$
$$AB_{12} - B_{01} B_{02} \equiv C_{12}, \quad AB_{13} - B_{01} B_{03} \equiv C_{13}, \quad AB_{14} - B_{01} B_{04} \equiv C_{14},$$
$$AB_{23} - B_{02} B_{03} \equiv C_{23}, \quad AB_{24} - B_{02} B_{04} \equiv C_{24}, \quad AB_{34} - B_{03} B_{04} \equiv C_{34}$$

setzt, folgende identische Gleichung:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{1}{A}[\Xi_1 q^2 + \Xi_2 r^2 + \Xi_3 s^2 + \Xi_4 t^2]$$
$$+ 2C_{12} qr + 2C_{13} qs + 2C_{14} qt + 2C_{23} rs + 2C_{24} rt + 2C_{34} st.$$

Indem wir weiter durch die folgende Gleichung:

$$q = Q - b_2 r - b_3 s - b_1 t,$$

Q statt q einführen, die drei Coëfficienten b_2, b_3, b_1 durch die Gleichungen

$$b_2 = \frac{C_{12}}{\Xi_1}, \quad b_3 = \frac{C_{13}}{\Xi_1}, \quad b_4 = \frac{C_{14}}{\Xi_1},$$

bestimmen und zugleich der Kürze wegen

$$\Xi_1\Xi_2 - C_{12}^2 \equiv A\Theta_2, \quad \Xi_1\Xi_3 - C_{13}^2 \equiv A\Theta_3, \quad \Xi_1\Xi_4 - C_{14}^2 \equiv A\Theta_4,$$
$$\Xi_1 C_{23} - C_{12}C_{13} \equiv AD_{23}, \quad \Xi_1 C_{24} - C_{12}C_{14} \equiv AD_{24}, \quad \Xi_1 C_{34} - C_{13}C_{14} \equiv AD_{34},$$

setzen, kommt:

$$\Omega = AP^2 + \frac{\Xi_1}{A} \cdot Q^2 + \frac{1}{\Xi_1} [\Theta_2 r^2 + \Theta_3 s^2 + \Theta_4 t^2]$$
$$+ 2D_{23}rs + 2D_{24}rt + 2D_{34}st.$$

Indem wir ferner durch die folgende Gleichung:

$$r = R - c_3 s - c_4 t,$$

R statt r einführen, die beiden Coëfficienten c_3 und c_4 durch die Gleichungen

$$c_3 = \frac{D_{23}}{\Theta_2}, \qquad c_4 = \frac{D_{24}}{\Theta_2}$$

bestimmen und zugleich, der Kürze wegen,

$$\Theta_2\Theta_3 - D_{23}^2 \equiv \Xi_1\Phi_3, \qquad \Theta_2\Theta_4 - D_{24}^2 \equiv \Xi_1\Phi_4,$$
$$\Theta_2 D_{34} - D_{23}D_{24} \equiv \Xi_1 E_{34}$$

setzen, ergiebt sich:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_1}{A} \cdot Q^2 + \frac{\Theta_2}{\Xi_1} R^2 + \frac{1}{\Theta^2} [\Phi_3 s + \Phi_4 t] + 2E_{34}st.$$

Indem wir endlich durch die folgenden Gleichungen:

$$s = S - d_4 t, \qquad t = T,$$

S statt s einführen und T mit t vertauschen, den Coëfficienten d_4 durch die Gleichung

$$d_4 = \frac{E_{34}}{\Phi_3}$$

bestimmen und, der Kürze wegen,

$$\Theta_3\Theta_4 - E_{34}^2 \equiv \Theta_2\Psi_4$$

setzen, gelangen wir zu der identischen Gleichung:

$$1. \quad \Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_1}{A} \cdot Q^2 + \frac{\Theta_2}{\Xi_1} \cdot R^2 + \frac{\Phi_3}{\Theta_2} \cdot S^2 + \frac{\Psi_4}{\Phi_3} \cdot T^2;$$

und somit ist unsere Aufgabe vollständig gelöset.

3. Wenn man die verschiedenen Verwandlungsformeln zusammenstellt, so kommt:

$$2. \quad \begin{cases} T = t, \\ S = s + d_4 t, \\ R = r + c_3 s + c_4 t, \\ Q = q + b_2 r + b_3 s + b_4 t, \\ P = p + a_1 q + a_2 r + a_3 s + a_4 t. \end{cases}$$

Um, umgekehrt, die ursprünglichen Veränderlichen durch die neuen auszudrücken, erhalten wir Gleichungen von derselben Form, nemlich:

$$3.\quad\begin{cases} t = T, \\ s = S+\delta_4 T, \\ r = R+\gamma_3 S+\gamma_4 T, \\ q = Q+\beta_2 R+\beta_3 S+\beta_4 T, \\ p = P+\alpha_1 Q+\alpha_2 R+\alpha_3 S+\alpha_4 T. \end{cases}$$

Die 10 Coëfficienten in den Formeln (2.) und die 10 Coëfficienten in den Formeln (3.) bestimmen sich gegenseitig ganz auf dieselbe Weise. Wir finden (und können hierbei überall die sich entsprechenden Buchstaben des griechischen und lateinischen Alphabets gegenseitig vertauschen) die folgenden Gleichungen:

$$\delta_4 = -d_4,$$
$$\gamma_3 = -c_3,$$
$$\gamma_4 = -(c_4-c_3 d_4),$$
$$\beta_2 = -b_2,$$
$$\beta_3 = -(b_3-b_2 c_3),$$
$$\beta_4 = -(b_4-b_3 d_4-b_2 c_4+b_2 c_3 d_4),$$
$$\alpha_1 = -a_1,$$
$$\alpha_2 = -(a_2-a_1 b_2),$$
$$\alpha_3 = -(a_3-a_2 c_3-a_1 b_3+a_1 b_2 c_3),$$
$$\alpha_4 = -(a_4-a_3 d_4-a_2 c_4-a_1 b_4+a_2 c_3 d_4+a_1 b_3 d_4+a_1 b_2 c_4-a_1 b_2 c_3 d_4).$$

4. Die 10 Coëfficienten der Verwandlungsformeln (3.) lassen sich auch unmittelbar bestimmen. Der Coëfficient δ_4 oder $(-d_4)$ ist bereits in der 2ten Nummer durch die Coëfficienten der ursprünglichen Function ausgedrückt worden. Ohne Schwierigkeit erkennen wir aber aus der Form der Verwandlungsformeln, dafs wir hiernach γ_4, β_4, α_4 sogleich erhalten, wenn wir in dem Ausdrucke für δ_4, einer Vertauschung von s mit r, q, p entsprechend, in den Marken der Coëfficienten der ursprünglichen Gleichung 3 bezüglich mit 2, 1, 0 vertauschen. Eben so ergiebt sich durch Vertauschung der Marke 2 mit 1 und 0 aus dem bekannten Werthe von γ_3 oder $(-c_3)$ der Werth von γ_2 und γ_1; ferner durch Vertauschung der Marken 1 und 0, aus dem bekannten Werthe von β_2 oder $(-b_2)$ der Werth von α_2; und endlich ist $\alpha_1 = -a_1$.

5. Es giebt noch eine zweite Verwandlungsweise, die in gewissem Sinne als eine Verallgemeinerung desjenigen Verfahrens anzusehen ist, nach welchem bei der gewöhnlichen Discussion der Flächen und Linien zweiter Ordnung der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct

verlegt wird. Während die Verfahrungsweise der 2ten Nummer, die ihren Keim schon in meiner Discussion der Linien zweiter Classe (Entwicklungen II. Abschn. II. §. 1.) hat, zunächst die 10 Coëfficienten der Formeln (2.) giebt, führt die zweite Verfahrungsweise, die ich an einem anderen Orte ausführlicher entwickeln werde, unmittelbar zur Bestimmung der 10 Coëfficienten der Formeln (3.); und zwar folgendergestalt.

Wenn man die Function Ω, nachdem man in ihr $t=1$ gesetzt hat, zur Unterscheidung Ω_1 nennt, so ergeben die vier linearen Gleichungen

$$\frac{d\Omega_1}{dp}=0,\quad \frac{d\Omega_1}{dq}=0,\quad \frac{d\Omega_1}{dr}=0,\quad \frac{d\Omega_1}{ds}=0$$

für die vier Veränderlichen p, q, r, s im Allgemeinen vollkommen bestimmte Werthe. Diese Werthe sind bezüglich α_4, β_4, γ_4, δ_4.

Bezeichnen wir ferner die Function Ω, nachdem wir in ihr $t=0$, $s=1$ gesetzt haben, durch Ω_2, so sind die Werthe, welche die drei linearen Gleichungen

$$\frac{d\Omega_2}{dp}=0,\quad \frac{d\Omega_2}{dq}=0,\quad \frac{d\Omega_2}{dr}=0$$

für die drei Veränderlichen p, q, r geben, zugleich die Werthe von α_3, β_3 γ_3.

Setzen wir $t=0$, $s=0$, $r=1$ und bezeichnen, was alsdann aus Ω wird, durch Ω_3, so geben die beiden linearen Gleichungen

$$\frac{d\Omega_3}{dp}=0,\quad \frac{d\Omega_3}{dq}=0$$

für p und q zwei solche Werthe, welche zugleich die Werthe von α_2 und β_2 sind.

Nennen wir endlich das, was aus der ursprünglichen Function wird, wenn wir $t=0$, $s=0$, $r=0$, $q=1$ setzen, Ω_4, so giebt die Gleichung

$$\frac{d\Omega_4}{dp}=0$$

für p den Werth der letzten Constante α_1.

Die Resultate dieser Nummer bestätigen die Behauptungen der vorigen. Umgekehrt sind wir in Folge von diesen der weitläuftigen Eliminationen, welche namentlich die directe Bestimmung der vier Constanten α_4, β_4, γ_4, δ_4 erfordert, überhoben.

Die vorstehenden analytischen Entwicklungen eines in verschiedener Absicht vielfach behandelten Gegenstandes scheinen hiernach, was Symmetrie und Einfachheit betrifft, nichts mehr zu wünschen übrig zu lassen.

Bonn am 30ten September 1842.

(Die Fortsetzung folgt.)

Crelle, Journal d. Math. Bd XXIV Heft 3.

Fac simile einer Handschrift von Legendre.

…………… j'ai enfin fini à ma satisfaction le
troisième supplément que j'avais eu l'honneur de vous annoncer.
Ce supplément qui m'a couté beaucoup de travail, et qui équivaut
en étendue aux deux autres, complète et termine entièrement
le troisième volume de mon traité. J'ai donc le plaisir
de vous en adresser un exemplaire; vous verrez que je suis
parvenu à tirer du beau théorème de M. Abel une théorie
toute nouvelle, à laquelle je donne le nom de <u>théorie des
fonctions ultraelliptiques</u>, laquelle est beaucoup plus
étendue que celle des fonctions elliptiques, et cependant
conserve avec celle-ci des rapports très intimes. En travaillant
pour mon propre compte j'ai éprouvé une grande satisfaction
de rendre un éclatant hommage au génie de M. Abel,
en faisant sentir tout le mérite du beau théorème dont
l'invention lui est due, et auquel on peut appliquer la
qualification de <u>Monumentum aere perennius</u>.

Le Gendre

23.

Recherches sur les formes quadratiques à coëfficients et à indéterminées complexes.

(Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet* à Berlin.)

Première partie.

Comme les recherches que nous aurons à exposer dans ce Mémoire, présentent par leur objet et par les résultats auxquels elles conduisent, beaucoup d'analogie avec d'autres recherches déjà publiées *), il convient, avant d'en donner un idée générale, de rappeler en peu de mots la question qui a été traitée dans le Mémoire que nous venons de citer. Le Mémoire dont il s'agit. se rapporte à la théorie des *formes quadratiques*, théorie qui, préparée par quelques énoncés de *Fermat* et par les ingénieuses recherches d'*Euler* et définitivement fondée par *Lagrange*, a reçu plus tard de notables accroissements par les travaux de *Legendre* et surtout par ceux de Mr. *Gaufs*, qui y a consacré la plus grande partie de ses „Disquisitiones arithmeticae," en sorte qu'elle constitue aujourd'hui l'une des branches principales de la science des nombres. On sait que les propriétés d'une telle expression dépendent surtout d'un entier qui est une fonction très-simple de ses coëfficients et que par cette raison on nomme le *déterminant* de la forme quadratique. Quoique le nombre des formes qui ont un même déterminant donné quelconque, positif ou négatif, soit infini, ces formes se réduisent toujours à un nombre limité d'expressions distinctes, c'est-à-dire, non-transformables les unes dans les autres. Cette propriété, capitale dans la matière, a été établie par *Lagrange* qui a aussi fait connaître les opérations arithmétiques, au moyen desquelles ces formes non-équivalentes peuvent être assignées, lorsque le déterminant est numériquement donné. Mais si ce procédé suffisait pour l'objet auquel son illustre auteur l'avait déstiné, il ne donnait aucune lumière sur la liaison générale qui doit exister entre le déterminant et le nombre des formes distinctes qui

*) Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres. Tome XIX et XXI de ce Journal.

y répondent, et la loi qui exprime cette dépendance et dont la connaissance, outre qu'elle devait présenter beaucoup d'intérêt par elle-même, était indispensable pour d'autres recherches, restait entièrement inconnue. Or tel est précisément l'objet de la question qu'on s'est proposée dans le Mémoire cité et qu'on y a résolue au moyen d'une analyse dont le principe fondamental consiste à exprimer les propriétés caractéristique du système des formes non-équivalentes répondant à un déterminant quelconque, à l'aide d'une équation dont l'un des membres ne contient rien qui soit relatif à ces formes, tandis que l'autre se compose de suites infinies doubles dont le nombre est égal à celui des formes et dont chacune présente dans son terme général l'une des expressions quadratiques dont il s'agit. L'équation ainsi formée renfermant une variable assujettie à la seule condition de rester supérieure à l'unité, si l'on passe au cas-limite, où cette variable approche indéfiniment de l'unité, les séries doubles tendent toutes vers une limite commune facile à assigner, et l'égalité se transforme de manière à exprimer le nombre des formes par une suite infinie d'une loi très-simple et dont la somme s'obtient aisément avec le secours des formules connues. En effectuant cette dernière opération, on reconnait que l'expression du nombre des formes qui répondent à un déterminant quelconque, présente deux cas très-distincts suivant que ce déterminant est un nombre négatif ou positif. Dans le premier de ces cas, l'expression de la loi dont il s'agit a un caractère purement arithmétique, tandis que pour un déterminant positif elle est d'une nature plus composée et en quelque sorte mixte, puisque, outre les éléments arithmétiques dont elle dépend elle en renferme d'autres qui ont leur origine dans certaines équations auxiliaires qui se présentent dans la théorie des équations binomes, et appartiennent par conséquent à l'Algèbre. Ce dernier résultat est surtout remarquable et offre un nouvel exemple de ces rapports cachés que l'étude approfondie de l'Analyse mathématique nous fait découvrir entre les questions en apparence les plus disparates.

La solution dont nous venons de rappeler l'idée fondamentale, n'empruntant de la théorie des formes quadratiques que leurs propriétés les plus élémentaires et s'achevant sans difficulté lorsque ces propriétés ont été une fois reconnues et mises en équation, il était naturel de chercher à étendre les applications de ce genre d'analyse et à résoudre par son moyen d'autres questions analogues mais d'un ordre plus élevé. Les questions que l'on doit considérer comme telles, sont assez nombreuses; on peut dans les recherches

de cette nature, remplacer les formes quadratiques par des fonctions homogenès d'un degré plus élevé, on peut aussi, sans sortir du second degré, et c'est là le cas dont nous nous sommes occupé d'abord et que nous traiterons exclusivement dans ce Mémoire, modifier la nature des formes quadratiques et supposer par exemple que leurs coëfficients sont des entiers complexes. On doit à Mr. *Gaufs* l'idée de considérer de pareils entiers *), et l'on sait qu'il y a été conduit par ses recherches sur les résidus biquadratiques, qui lui ont fait reconnaître que la théorie de ces résidus qui parait très-compliquée tant qu'on la rapporte aux entiers réels, se présente sous une face bien différente, lorsqu'on l'envisage sous ce nouveau point de vue, et se résume alors dans une loi de réciprocité d'une simplicité et d'une élégance extrêmes et d'ailleurs parfaitement analogue à celle que l'on connaissait depuis longtemps pour les résidus quadratiques. L'importance de l'idée si profonde que nous venons de rappeler ne consiste pas seulement à amener de pareilles simplifications; elle est d'un usage beaucoup plus étendu et l'on doit la considérer comme ouvrant un nouveau champ aux spéculations arithmétiques.

Avant de transporter dans la théorie des nombres ainsi généralisée la question qui avait été traitée précédemment, il fallait se livrer à un travail préliminaire indispensable et ayant pour objet de se rendre compte des modifications que les propositions fondamentales de la théorie des formes quadratiques doivent subir pour être applicables aux entiers complexes. Ce travail achevé, on a pu reconnaître que les principes dont on avait fait usage dans le Mémoire cité, s'appliquent avec le même succès à la nouvelle question. Seulement, comme cette dernière est d'une nature plus compliquée, les discussions que la solution exige, prennent plus d'étendue et l'on trouve par exemple que pour passer à ce que nous avons nommé plus haut le cas-limite, il faut ici évaluer une intégrale définie quadruple, tandis que précédemment on n'avait eu à considérer que des intégrales doubles, se réduisant d'ailleurs sur le champ à la quadrature de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Mais sans entrer ici dans d'autres détails sur la marche de la solution, nous nous bornerons à dire que le résultat définitif est entièrement semblable à celui qui répond au second des deux cas que nous avons

---

*) Theoria residuorum biquadraticorum. Comment. secunda.

distingués plus haut. On reconnait en effet que pour un déterminant complexe, le nombre des formes se rattache généralement à la division de la fonction elliptique complète de première espèce dont le module est $\sqrt{\frac{1}{2}}$, ou ce qui revient au même, à la division de la lemniscate en parties égales, le diviseur ou le nombre de ces parties étant un entier complexe.

Outre le résultat dont nous venons d'indiquer la nature, la question présente deux résultats particuliers très-singuliers et tout-à-fait inattendus. Ces résultats sont relatifs aux cas où le déterminant est un entier réel ou le produit d'un tel entier par $\sqrt{-1}$, le nombre des formes pouvant alors être assigné sans le secours des équations qui se rapportent à la division des fonctions elliptiques. Pour ne parler ici que du premier de ces deux cas, dont le second ne diffère pas au fond, le résultat consiste en ce que relativement à un entier réel D, considéré comme le déterminant de formes quadratiques à coëfficients complexes, le nombre des formes distinctes est égal au produit ou au double produit des deux nombres qui expriment combien il existe de formes pour les deux déterminants opposés D et $-D$, considérés sous le point de vue ordinaire, ces deux cas étant d'ailleurs distingués par un critérium très-simple.

Comme les recherches dont nous venons de présenter l'analyse, exigent des développements assez étendues, nous avons dû diviser notre travail en deux parties, dont la première que nous publions aujourd'hui, contient outre les discussions préliminaires, la solution de la question principale conduite jusqu'au point où elle se trouve dépendre de la sommation d'une série double. Nous terminons cette première partie par l'examen des deux cas particuliers mentionnés plus haut, et qui peuvent être traités complètement, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer la double sommation. Dans la seconde partie nous acheverons la solution générale et nous discuterons en outre quelques questions accessoires telles que celles qui concernent la distribution des formes quadratiques en genres, et que nous avons dû laisser de côté dans cette première partie, pour ne pas interrompre la marche des considérations qui se rapportent à la question principale.

Quoique les propositions élémentaires de la théorie des entiers complexes aient déjà été exposées par l'illustre géomètre que nous avons cité plus haut, nous avons pensé qu'il pourrait être commode pour le lecteur de trouver dans une courte introduction celles de ces propositions dont nous aurons à faire usage plus tard.

Définitions et théorèmes préliminaires.

§. 1.

On appelle *nombre complexe* toute expression de la forme $a+bi$, i désignant la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$, et a et b ayant des valeurs réelles quelconques. Comme il est souvent nécessaire de distinguer le cas où l'une des valeurs réelles a et b s'évanouit de celui où ces valeurs sont l'une et l'autre différentes de zéro, nous nommerons l'expression précédente monome ou binome suivant ces deux cas. Le nombre réel et toujours positif, a^2+b^2, le seul cas excepté où l'on a à la fois $a=0$, $b=0$, sera dit la *norme* du nombre complexe $a+bi$. Cette norme n'est donc autre chose que ce que l'on appelle communément le quarré du module de l'expression imaginaire $a+bi$. Mais comme ce quarré se présentera beaucoup plus souvent dans nos recherches que le module lui-même, il convient de lui consacrer une dénomination spéciale telle que la précédente déjà proposée par Mr. *Gaufs*, d'autant plus que l'emploi du mot module pourrait donner lieu à des équivoques. Nous conviendrons de désigner la norme en plaçant la caractéristique N devant le nombre complexe dont il s'agit et d'écrire $N(a+bi)$. Au moyen de ce signe on aura ces equations évidentes et qu'on a souvent occasion d'employer

$$N(kl) = N(k)N(l), \qquad N\left(\frac{k}{l}\right) = \frac{N(k)}{N(l)}.$$

Dans la théorie des nombres complexes on a à considérer ces quatre unités 1, i, -1, $-i$, dont l'une quelconque peut être désignée par i^ϱ, en supposant $\varrho = 0, 1, 2, 3$.

On appelle nombres complexes associés quatre nombres tels que ceux-ci

$$a+bi, \quad -b+ai, \quad -a-bi, \quad b-ai,$$

et dont chacun produit les trois autres, lorsqu'on le multiplie par i, -1 et $-i$. Ces quatre nombres sont toujours inégaux à moins qu'on n'ait simultanément $a=0$, $b=0$.

Deux nombres complexes tels que

$$a+bi, \quad a-bi$$

sont dits conjugués, lorsque l'un se change dans l'autre, en remplaçant i par $-i$. De pareils nombres sont pareillement inégaux excepté lorsque $b=0$.

Des nombres associés ont toujours une norme commune et la même chose a lieu pour deux nombres conjugués.

Ce qui précède s'applique à des nombres complexes quelconques.

Les nombres complexes $a+bi$ portent différents noms, suivant la nature des nombres réels a et b qu'on en doit considérer comme les éléments. Un nombre complexe $a+bi$ s'appelle entier, lorsque a et b sont l'un et l'autre des entiers, rationnel lorsque a et b sont l'un et l'autre rationnels, et irrationnel dans tout autre cas. Comme les nombres que nous aurons à considérer, seront presque toujours des nombres complexes entiers, nous supprimerons généralement les adjectifs à moins que cette suppression ne puisse donner lieu à des équivoques.

Lorsque relativement à un entier complexe k, on a $N(k)=1$, on peut en conclure que k est de la forme i^{ϱ}. On voit encore par l'équation $N(kl)=N(k)N(l)$, que la norme d'un entier kl, multiple d'un autre l, est elle-même un multiple de celle de ce dernier. Il résulte de là que les diviseurs d'un entier quelconque m ont toujours des normes inférieures ou tout au plus égales à celle de m, et que ce dernier cas ne peut avoir lieu que lorsque le diviseur coïncide avec le nombre dont il s'agit ou avec l'un de ses trois associés.

Si donc pour abréger on nomme plus grand qu'un autre, un nombre complexe donc la norme surpasse celle de ce dernier, on peut dire que les plus grands diviseurs d'un entier complexe sont cet entier lui-même et ses associés.

Un entier complexe $a+bi$ autre que i^{ϱ}, est dit composé, lorsqu'il peut se décomposer en deux facteurs qui ne sont ni l'un ni l'autre de la forme i^{ϱ}. Dans le cas contraire il s'appelle premier.

Il est facile de voir que des nombres associés sont toujours simultanément des nombres premiers ou simultanément des nombres composés, et qu'il en est de même pour deux nombres conjugués.

§. 2.

Si m et m_1 désignent deux entiers complexes quelconques, on pourra toujours trouver un entier complexe q tel que l'on ait $N(m-m_1q) \overline{\gtrless} \frac{1}{2}N(m_1)$. Il suffit pour s'en assurer, de remarquer qu'on a

$$N(m-m_1q)=N(m_1)\,N\left(\frac{m}{m_1}-q\right)$$

et que les deux entiers réels qui entrent dans q, peuvent toujours être choisis de manière à différer de la partie réelle de $\frac{m}{m_1}$ et du coëfficient de i dans cette même expression, de quantités réelles dont les valeurs numériques ne surpassent pas le nombre $\frac{1}{2}$. Il est facile de fonder là-dessus un procédé propre à faire découvrir le plus grand diviseur commun de deux entiers complexes m et m_1 quelconques. On formera les équations

$$m = m_1 q + m_2, \quad m_1 = m_2 q_1 + m_3, \quad \ldots . \quad m_h = m_{h+1} q_h,$$

où les entiers $q, q_1, \ldots .$ sont choisis de manière à ce qu'on ait

$$N(m_2) \leqq \tfrac{1}{2} N(m_1), \qquad N(m_3) \leqq \tfrac{1}{2} N(m_2), \quad \ldots . . ,$$

ce qui aura nécessairement pour effet de conduire à une dernière équation où $m_{h+2} = 0$. Cela fait, il suffit de parcourir les équations précédentes, pour voir que tout diviseur commun de m et m_1 divise aussi les termes suivants $m_2, \ldots .$ jusqu'à m_{h+1} inclusivement. Si l'on considère ensuite les mêmes équations en sens inverse, on voit sur le champ que réciproquement tout diviseur de m_{h+1} est aussi diviseur commun de m et m_1, d'où l'on conclut que le plus grand diviseur commun cherché est l'entier m_{h+1} ou l'un de ses associés, et que dans le cas particulier où m et m_1 sont premiers entre eux, m_{h+1} sera toujours de la forme i^e. Le procédé précédent conduit facilement à la démonstration du théorème suivant.

„Si, m et m_1 étant premiers entre eux, le produit mn est divisible „par m_1, n sera nécessairement un multiple de m_1."

En vertu de ce qui précède, on aura nécessairement $m_{h+1} = i^e$. D'un autre côté comme mn est supposé divisible par m_1, on conclut des équations précédentes multipliées par n, que les produits $m_2 n$, $m_3 n$, ..., $m_{h+1} n$ sont également des multiples de m_1, conclusions dont la dernière coïncide avec le résultat qu'il s'agit d'établir.

Le théorème que nous venons de démontrer, étant entièrement semblable à celui qui dans la théorie ordinaire sert de base à toutes les recherches sur les nombres en tant qu'ils sont divisibles les uns par les autres, décomposables en facteurs simples etc., on en tirera les mêmes conséquences pour la théorie des nombres complexes.

En considérant en particulier m_1 comme un nombre premier absolu, on en conclut qu'un pareil nombre, pour diviser le produit de deux ou d'un plus grand nombre de facteurs, doit diviser au moins l'un de ces facteurs De là il suit encore qu'un entier premier à plusieurs autres l'est aussi à

leur produit, qu'un entier divisible par plusieurs autres qui n'ont pas de diviseur commun, pris deux à deux, l'est aussi par le produit de ces derniers, et ainsi de suite.

Le théorème connu d'après lequel un nombre réel ne peut se décomposer que d'une seule manière en facteurs simples réels, a aussi son analogue dans la théorie des nombres complexes. Il faut seulement, de même que dans le théorème énoncé on considère tacitement les facteurs simples comme positifs ou du moins pris chacun avec un signe déterminé, en agir ici d'une manière analogue. Supposons pour cela que dans chaque groupe de nombres associés, on distingue l'un d'entre eux, d'ailleurs arbitrairement choisi, en l'appelant nombre primaire. Dans cette hypothèse, un entier quelconque m pourra toujours se mettre sous la forme

$$m = i^e abc\ldots.,$$

a, b, c étant des nombres premiers primaires, égaux ou inégaux, et il est facile de s'assurer que la décomposition précédente est toujours unique. En effet si on suppose encore

$$m = i^{e'} a' b' c'\ldots.,$$

a', b', c' étant pareillement des nombres premiers primaires, il faudra nécessairement pour que ces deux équations s'accordent, que a divise l'un de nombres a', b', c', ... Or ces derniers étant premiers et primaires, a devra coïncider avec l'un d'entre eux, avec a' par exemple. Divisant les deux équations par a et continuant de procéder toujours de la même manière, l'identité des deux décompositions se trouvera établie. Si, comme on le fait dans la théorie ordinaire, on réunit les facteurs simples égaux sous forme de puissances, on aura donc d'une manière unique

$$m = i^e a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots.,$$

a, b, c, ... désignant des nombres premiers primaires inégaux et les exposants α, β, ... étant tous au moins égaux à l'unité, c'est-à-dire que les bases et leurs exposants, de même que le facteur i^e seront complètement déterminés dès que le nombre m sera donné.

§. 3.

Avant d'aller plus loin, il convient de rechercher les conditions propres à faire reconnaître si un entier complexe est premier ou composé.

I. Considérons d'abord un nombre binome $a+bi$, et soit $N(a+bi) = p$. Cela posé, il est facile de prouver que $a+bi$ est un nombre pre-

mier ou non suivant que sa norme, considérée sous le point de vue ordinaire, est elle-même un nombre premier ou composé. Observons d'abord que, si $a+bi$ est composé, en sorte qu'on peut supposer $a+bi=(c+di)(f+gi)$, $N(c+di)>1$, $N(f+gi)>1$, on aura $N(a+bi)=N(c+di)N(f+gi)$, c'est-à-dire égal à un nombre composé. Ce premier point établi, il ne reste évidemment qu'à prouver que si $N(a+bi)=a^2+b^2$, est un nombre composé, $a+bi$ sera aussi composé, pour que la proposition se trouve démontrée. Soit $a^2+b^2=mn$, m et n étant deux entiers réels l'un et l'autre différents de l'unité. Si maintenant $a+bi$, et par suite aussi $a-bi$, était supposé premier, l'équation précédente mise sous la forme $(a+bi)(a-bi)=mn$, exigerait d'après le théorème démontré à la fin du §. précédent, que m et n fussent également des nombres premiers, sans quoi le second membre renfermerait plus de facteurs simples que le premier, et il faudrait de plus que m, abstraction faite d'un facteur de la forme i^ϱ, coïncidât avec l'un des nombres $a+bi$, $a-bi$, ce qui est impossible, ces derniers étant binomes, tandis que m est monome.

II. D'après ce qu'on vient de prouver, on voit que pour assigner tous les nombres premiers binomes, tout revient à découvrir quels sont parmi les nombres premiers réels et positifs, ceux qui peuvent se décomposer en deux quarrés. Pour ceux de la forme $4n+3$, une pareille décomposition est impossible, la somme de deux quarrés étant toujours de l'une des formes $4n$, $4n+1$, 2. Il ne reste donc que les nombres premiers $4n+1$, et le nombre 2. Soit p un nombre premier $4n+1$, il sera facile de prouver, qu'il existe toujours deux groupes de nombres premiers binomes associés ayant p pour norme commune. Cela résulte immédiatement du théorème connu, d'après lequel un nombre premier $4n+1$ est toujours la somme de deux quarrés, et ne l'est que d'une seule manière. Mais nous n'avons pas besoin de ce théorème, qui peut être considéré au contraire comme un corollaire de la théorie des nombres complexes. Nous supposerons seulement qu'on sache que l'entier réel ξ peut toujours être choisi de manière à rendre la formule ξ^2+1 divisible par p, comme cela résulte entr'autres du théorème de *Wilson*, en vertu duquel on peut poser $\xi=1.2\ldots.\frac{1}{2}(p-1)$. Le produit $(\xi+i)(\xi-i)$ étant ainsi divisible par le nombre p, qui ne divise évidemment ni l'un ni l'autre de ces deux facteurs, on en conclut que p est un nombre composé. Soit en conséquence $p=(a+bi)(c+di)$, $a^2+b^2>1$, $c^2+d^2>1$, on aura aussi $p^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$, d'où l'on conclut, le

nombre réel p^2 ne comportant que la seule décomposition $p \times p$ en deux facteurs positifs différents de l'unité, $p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, où les deux facteurs évidemment binomes, $a + bi$, $a - bi$, dont la norme commune est un nombre premier réel, seront premiers. Remarquons encore que les nombres premiers $a + bi$ et $a - bi$ sont toujours distincts, c'est-à-dire qu'ils ne sont ni égaux ni associés. En effet, comme a, b sont évidemment l'un pair, l'autre impair, la supposition $a - bi = i^{\varrho}(a + bi)$ exigerait d'abord $i^{\varrho} = \pm 1$, et par suite l'une de celles-ci $a = 0$, $b = 0$, dont l'impossibilité est manifeste. On voit donc qu'il existe toujours deux groupes distincts de nombres premiers binomes ayant pour norme commune un nombre premier positif $4n + 1$ quelconque, et l'on peut ajouter qu'il n'en existe que deux, car il résulte du théorème déjà cité que, si l'on suppose $(a' + b'i)(a' - b'i) = (a + bi)(a - bi)$, chacun des facteurs du premier membre est nécessairement égal ou associé à l'un des facteurs du second.

Le nombre 2 qui est également décomposable en deux quarrés, ne donne lieu qu'à un seul groupe de nombres premiers binomes, les deux nombres conjugués $1 + i$, $1 - i$ appartenant pour ce cas au même groupe.

III. Il ne reste qu'à examiner quels sont les nombres monomes qui dans la théorie des entiers complexes jouent le rôle de nombres premiers. Comme sous le rapport dont il s'agit, un nombre quelconque se trouve toujours dans la même catégorie que ses associés, nous n'aurons qu'à considérer des nombres monomes positifs, et comme parmi ces derniers, ceux qui sont composés sous le point de vue ordinaire, le sont également dans la théorie des entiers complexes, il n'est plus question que des nombres premiers positifs. Or, les nombres premiers $4n + 1$ et le nombre 2 ayant déjà été reconnus comme nombres composés, il ne reste en définitif qu'à considérer les nombres premiers $4n + 3$, par rapport auxquels il est facile de s'assurer qu'ils sont ici des nombres premiers, comme ils le sont sous le point de vue ordinaire. En effet, si pour un nombre q de cette espèce on avait $q = (a + bi)(c + di)$, $N(a + bi) > 1$, $N(c + di) > 1$, et par suite $q^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, il faudrait, q^2 n'étant susceptible que d'une seule décomposition en facteurs positifs différents de l'unité, qu'on eût $q = a^2 + b^2$, ce qui est impossible, comme nous l'avons déjà remarqué.

IV. Les nombres complexes considérés relativement au diviseur $1 + i$, et à sa seconde puissance $(1 + i)^2 = 2i$, forment trois classes, pour la désignation desquelles il est utile d'introduire des dénominations spéciales.

Un nombre sera dit impair, lorsqu'il n'est pas divisible par $1+i$, semi-pair, lorsqu'il est divisible par $1+i$, sans l'être par $(1+i)^2$ ou ce qui revient au même, par 2, et pair enfin, lorsqu'il peut être divisé par 2. Il est évident qu'un entier complexe $a+bi$ présentera le premier cas, lorsque les deux entiers réels a et b sont l'un pair, l'autre impair, le second, lorsque ces deux entiers sont l'un et l'autre impairs, et enfin le troisième, lorsque a et b sont tous deux pairs.

V. Nous avons déjà eu occasion de remarquer qu'il peut être utile de distinguer l'un des quatre nombres associés qui forment un même groupe, pour le considérer en quelque sorte comme le nombre primitif ou primaire de ce groupe, les trois autres étant censés dérivés de celui-là en multipliant par -1, $\pm i$. Le besoin d'un telle distinction réglée sur un principe invariable, se fera surtout sentir en tant qu'il s'agira de nombres impairs, et nous conviendrons donc de considérer comme le nombre primaire dans un groupe d'entiers complexes impairs, celui évidemment unique $a+bi$, pour lequel on a simultanément $a\equiv 1$ (mod. 4), et $b\equiv 0$ (mod. 2). Il est facile de conclure de cette définition que le produit de deux et par suite d'un nombre quelconque d'entiers impairs primaires, est lui-même un entier primaire. Cette convention embrasse déjà tous les nombres premiers, à l'exception de ceux qui dérivent du nombre 2, et qui sont $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Quoique relativement à ces derniers, le choix d'un nombre primaire soit peu utile, nous conviendrons pour plus d'uniformité de regarder comme tel le nombre $1+i$.

§. 4.

Etant donné un entier complexe quelconque m, on peut toujours concevoir la série complète des entiers complexes, distribuée en séries partielles, deux entiers étant rangés dans la même série ou dans des séries distinctes, suivant que leur différence est un multiple de m ou non. Si ensuite on choisit dans chacune de ces séries partielles l'un quelconque des termes qui la composent, on aura ce que nous appelerons *un système de résidus* pour le module donné m. Un pareil système jouit donc de la double propriété de contenir un terme et de n'en contenir qu'un, qui soit congru à un entier quelconque suivant le module auquel il répond. Pour construire un système de résidus, tout se réduit à découvrir quelque condition qui soit satisfaite par l'un des termes de toute série partielle et ne

le soit que par ce seul terme, et à assigner ensuite tous les entiers distincts qui remplissent la condition dont il s'agit. On parviendra, par exemple, à une condition de ce genre, si l'on cherche d'abord, $x+yi$ désignant le terme général d'une série partielle donnée, pour quels termes de cette dernière y a la plus petite valeur non-négative, et si l'on choisit ensuite parmi ces termes en nombre infini, celui nécessairement unique où x, supposé pareillement non-négatif, est à son tour un minimum. Pour découvrir la nature d'un pareil terme, soit $m=a+bi$, et désignons par $\alpha+\beta i$ un entier complexe arbitrairement choisi. On aura alors pour le terme général de la série partielle à laquelle cet entier appartient:

$$x+yi=(a+bi)(t+ui)+\alpha+\beta i,\quad x=at-bu+\alpha,\quad y=bt+au+\beta,$$

où t et u désignent tous les entiers réels depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. On voit par la dernière de ces équations, que les valeurs dont y est susceptible, sont toutes telles qu'on a $y\equiv\beta\ (\text{mod. } h)$, h désignant le plus grand diviseur commun (positif) de a et b. Il résulte de là que y peut toujours être égal à l'un des entiers $0, 1, 2, \ldots, h-1$, et ne peut l'être qu'à l'un d'entre eux. Soit donc y_0 celui de ces entiers, qui satisfait à la congruence précédente. Pour que y obtienne cette valeur particulière, on aura à satisfaire à l'équation

$$bt+au=y_0-\beta,$$

toujours résoluble et dont la solution complète exprimée en fonction d'une solution particulière t_0, u_0, est

$$t=t_0+\frac{a}{h}z,\qquad u=u_0-\frac{b}{h}z,$$

z désignant un entier réel arbitraire. Au moyen de ces expressions, l'équation en x deviendra

$$x=at_0-bu_0+\frac{p}{h}z,$$

où l'on suppose $a^2+b^2=p$. Comme il reste l'indéterminée z dont nous pouvons disposer à volonté, on voit que la plus petite valeur dont x soit susceptible, est l'une de celles-ci: $0, 1, 2, \ldots, \frac{p}{h}-1$, et il est également manifeste que parmi ces dernières il n'en existe qu'une seule que x puisse comporter. Ayant ainsi reconnu que dans toute série partielle il existe toujours un terme unique pour lequel x et y soient resp. compris dans les suites,

$$x=0, 1, 2, \ldots, \frac{p}{h}-1;\qquad y=0, 1, 2, \ldots, h-1;$$

on voit que pour obtenir un système de résidus pour le module $a+bi$, on

n'a qu'à introduire dans l'expression $x+yi$, les valeurs précédentes, combinées de toutes les manières entre elles.

Il y a un cas particulier qui mérite une attention particulière; c'est celui où a et b sont premiers entre eux, le système à former se réduisant alors simplement à la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,$$

de sorte que pour un module m de cette nature, on peut toujours satisfaire par un entier réel ξ, à la congruence

$$\xi \equiv k \pmod{m},$$

où k désigne un entier complexe quelconque.

§. 5.

Le résultat auquel nous venons de parvenir, donne lieu à plusieurs conséquences importantes que nous allons rapidement indiquer.

I. On voit d'abord que le système des résidus, qui répond à un module quelconque m, contient toujours un nombre de termes, exprimé par $N(m)$, car on a $\frac{p}{h}h = p = N(m)$.

II. On peut encore assigner séparément combien parmi ces termes il en existe de divisibles par un facteur k de m. Il est en effet facile de voir que ces derniers, étant divisés par k, constitueront un système de résidus pour le module $\frac{m}{k}$, en sorte que le nombre qu'il s'agit d'obtenir, est exprimé par $N\left(\frac{m}{k}\right)$.

III. Connaissant, par ce qui précède, le nombre des termes dont tout système de résidus pour le module m doit se composer, on peut en conclure que, si l'on a $N(m)$ entiers tels que la différence de deux quelconques d'entre eux, ne soit pas un multiple de m, on est dès lors assuré que ces entiers forment un système de résidus relativement au module m. Pour faire une application de ce principe, soit μ le terme général d'un système de résidus pour le module m, et désignons par n et l deux entiers déterminés dont le premier n'ait pas de diviseur commun avec m. Cela posé, je dis que l'expression $n\mu+l$ représentera également un pareil système. En effet, les valeurs de cette expression étant en nombre convenable, il ne reste plus qu'à s'assurer que deux quelconques d'entre elles ne sauraient présenter une différence multiple de m. Or cela est évident, puisque, μ' et μ'' désignant deux des valeurs dont μ est susceptible, la dif-

férence $n\mu' + l - (n\mu'' + l)$ est égale au produit $n(\mu' - \mu'')$, dont le premier facteur n'a pas de diviseur commun avec m, et dont le second n'est pas un multiple de cet entier

L'expression $n\mu + l$ représentant un système de résidus, on voit que parmi les valeurs que μ comporte, il y a toujours une valeur unique telle que cette expression soit divisible par m, ou en d'autres termes, que la congruence

$$nx + l \equiv 0 \pmod{m},$$

lorsque n n'a pas de diviseur commun avec m, est toujours possible, et que sa solution générale est de la forme

$$x \equiv x_0 \pmod{m},$$

x_0 désignant une solution particulière, de sorte que cette congruence a une racine unique, en considérant à l'ordinaire comme ne constituant qu'une seule racine, toutes les valeurs qui diffèrent les unes des autres de multiples du module. La congruence en question étant équivalente à l'équation

$$nx + my + l = 0,$$

on voit encore que la solution générale de celle-ci est donnée par les formules

$$x = x_0 + mz, \qquad y = y_0 - nz,$$

x_0, y_0 désignant une solution particulière quelconque, et z étant un entier complexe arbitraire. Quant à la résolution effective de cette équation ou de la congruence équivalente, elle peut s'effectuer au moyen de l'algorithme employé plus haut pour découvrir le plus grand diviseur commun de deux entiers complexes; mais comme nous n'aurons pas à en faire usage, nous ne nous arrêterons pas sur cette résolution, d'ailleurs entièrement semblable à celle qui concerne les entiers réels.

IV. Soient maintenant $a, b, c, \ldots$ des entiers complexes en nombre quelconque et premiers entre eux. Construisons des systèmes de résidus pour chacun de ces entiers ainsi que pour leur produit $m = abc\ldots$, et désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; μ, les termes généraux de ces systèmes. Cela posé, si relativement à chacun des entiers μ, nous déterminons les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qui en diffèrent respectivement d'un multiple de $a, b, c, \ldots$, à tout entier μ se trouvera correspondre une combinaison unique de la forme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Prouvons réciproquement que toute combinaison de cette espèce provient toujours de l'un des entiers μ, et ne saurait provenir que de l'un d'entre eux. Cette dernière assertion est facile à justifier; en

effet si la même combinaison répondait à deux entiers μ distincts, leur différence serait divisible par a, b, c, ... et par suite aussi par m, ce qui est contraire à la nature du système dont μ désigne le terme général. Ayant ainsi reconnu que les combinaisons qui proviennent des entiers μ, sont toutes différentes entre elles, il suffit de remarquer que le nombre de toutes les combinaisons possibles est évidemment $N(a)N(b)N(c)\ldots = N(m)$, c'est-à-dire égal à celui des entiers μ, pour que la proposition énoncée se trouve établie.

V. Il est facile de voir que, si μ est premier à m, les entiers correspondants α, β, γ, ... seront *tous* respectivement premiers à a, b, c, ... et réciproquement. Si donc relativement à un entier quelconque l, on désigne par $\psi(l)$ le nombre de ceux des termes formant un système de résidus pour le module l, qui n'ont pas de diviseur commun avec ce dernier, on aura pour un module m, décomposé en facteurs a, b, c, ... premiers entre eux, $\psi(m) = \psi(a)\psi(b)\psi(c)\ldots$

VI. Nous pouvons au moyen de la remarque qui vient d'être faite, déterminer la fonction $\psi(m)$ pour un module m quelconque. Soit d'abord $m = a^\alpha$, a désignant un nombre premier et l'exposant α étant au moins égal à l'unité. Pour ce cas on obtiendra évidemment le nombre de ceux des termes formant le système des résidus pour le module m, qui sont premiers à m, si du nombre total des termes du système, on retranche le nombre de ses termes divisibles par a. Ces nombres étant le premier égal à $N(a^\alpha)$, et le second égal à $N(a^{\alpha-1})$, (voyez plus haut I. et II.) on obtiendra pour la différence cherchée, $N(a^\alpha) - N(a^{\alpha-1}) = (A-1)A^{\alpha-1}$, en supposant $A = N(a)$.

Après cela il est facile de voir que relativement à un nombre quelconque

$$m = i^\varrho a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

a, b, c étant des nombres premiers primaires inégaux, et les exposants α, β, γ, ... étant tous différents de zéro, on aura

$$\psi(m) = (A-1)A^{\alpha-1}.(B-1)B^{\beta-1}.(C-1)C^{\gamma-1}\ldots$$

en posant pour abréger

$$N(a) = A, \quad N(b) = B, \quad \ldots$$

et l'on doit ajouter que, lorsque m est de la forme i^ϱ, la fonction $\psi(m)$ se réduit à l'unité positive.

Théorie des résidus quadratiques.

§. 6.

Etant donnés deux entiers complexes quelconques k et m, le premier est dit *résidu* ou *non-résidu quadratique* par rapport au second, suivant que la congruence $x^2 \equiv k \pmod{m}$, dont l'inconnue x est pareillement considérée comme complexe, est ou n'est pas possible. Pour procéder, dans la recherche des conditions propres a distinguer l'un de l'autre ces deux cas, du simple ou composé, nous considérons en premier lieu m comme un nombre premier impair *) non-diviseur de k qui reste quelconque. Soit

$$(M) \qquad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots$$

le système des résidus relatif au module m, à l'exclusion de celui des termes de ce système, qui est un multiple de m. Cela étant, la congruence $\mu x \equiv k \pmod{m}$, où μ désigne l'un quelconque des entiers du systême (M), sera toujours satisfaite par une valeur unique x comprise dans la suite (M). Distinguons maintenant les deux cas différents que la relation de k à m peut présenter, et supposons d'abord que k soit non-résidu quadratique relativement à μ. Dans cette hypothèse, x sera toujours différent de μ, d'où il suit que les entiers (M), peuvent être distribués en groupes composés chacun de deux termes dont le produit soit $\equiv k \pmod{m}$. Or, le nombre de ces groupes étant évidemment $\frac{1}{2}(p-1)$, où l'on suppose $p = N(m)$, on aura en multipliant

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots\ldots \equiv k^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{m}.$$

Dans la seconde hypothèse qui est celle de k résidu quadratique par rapport à μ, la distribution en groupes peut encore s'effectuer sur la suite (M), après en avoir retranché les termes μ tels qu'on a $\mu^2 \equiv k \pmod{m}$. Mais comme les termes qui satisfont à cette dernière condition, évidemment toujours au nombre de deux, et tels que l'un est congru à l'autre pris avec le signe moins, donnent un produit $\equiv -k \pmod{m}$, on voit qu'en multi-

*) Le cas où le module se réduit à la forme i^e, ne donne lieu à aucune question, un entier quelconque étant toujours résidu quadratique d'un tel module. Il est néanmoins bon d'observer que les formules qu'on va établir, lorsqu'on y suppose m de cette forme, ne donnent rien d'inexact, pour qu'on soit dispensé dans les recherches générales d'avoir égard à ce cas singulier.

pliant ce produit par tous les autres termes rangés en groupes, il viendra

$$\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\equiv -k^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{m}.$$

Comme le produit $\mu_1\mu_2\mu_3\ldots$ est indépendant de l'entier k, nous pouvons le déterminer en attribuant à k une valeur particulière. Si l'on suppose à cet effet, $k=1$, ce qui se rapporte évidemment au second cas, on trouve ce résultat

$$\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\equiv -1 \pmod{m}$$

qui est analogue au théorème connu de *Wilson* et au moyen duquel les congruences precédentes, réunies en une seule, prennent cette forme plus simple:

$$k^{\frac{1}{2}(p-1)}\equiv \pm 1 \pmod{m},$$

où il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que k est ou n'est pas résidu quadratique relativement à m. Nous conviendrons de désigner désormais par $\left[\frac{k}{m}\right]$ le nombre ± 1 qui entre dans la congruence précédente, de sorte qu'on aura

$$k^{\frac{1}{2}(p-1)}\equiv \left[\frac{k}{m}\right] \pmod{m}.$$

Le symbole $\left[\frac{k}{m}\right]$ est analogue à celui que *Legendre* a introduit, et dont l'usage est aujourd'hui généralement adopté; mais il importe de ne pas confondre ces deux genres de notations dont la seconde, restreinte aux entiers réels, n'exprime pas toujours la même valeur que celle que nous venons de proposer, désigne pour ce cas particulier. C'est ce qu'on voit par exemple, en supposant $k=2$, $m=3$, puisqu'on a alors $\left[\frac{2}{3}\right]=1$, $\left(\frac{2}{3}\right)=-1$. Cette circonstance n'a d'ailleurs rien qui puisse étonner, une congruence telle que $x^2\equiv 2 \pmod{3}$, qui n'est pas possible tant que l'inconnue est supposée réelle, pouvant admettre des solutions, lorsque cette inconnue est considérée comme susceptible de valeurs imaginaires.

Relativement à la notation que nous venons d'adopter, on a ces deux équations évidentes:

$$(a)\qquad \left[\frac{k}{m}\right]=\left[\frac{l}{m}\right],\qquad \left[\frac{k}{m}\right]\left[\frac{k'}{m}\right]\left[\frac{k''}{m}\right]\ldots=\left[\frac{kk'k''\ldots}{m}\right],$$

où l'on suppose $k\equiv l \pmod{m}$, et où $k, k', k'', \ldots$ sont des entiers quelconques non-divisibles par m.

Nous allons maintenant faire voir que la question de savoir si k est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à m, peut toujours se ramener à une question analogue, mais qui ne porte que sur des entiers réels, ou en d'autres termes, nous démontrerons qu'une expression telle que $\left[\frac{k}{m}\right]$ est toujours réductible à une autre de la forme ( ).

Avant de montrer comment cette réduction peut être effectuée, nous remarquerons que, l'expression $\left[\frac{k}{m}\right]$ restant évidemment invariable lorsque le nombre m est remplacé par l'un de ses associés, il sera permis de supposer désormais $m = a + bi$, a et b étant respectivement impair et pair. Cela posé, nous traiterons successivement le cas où $b = 0$, et celui où b est différent de zéro.

1. Dans le premier de ces deux cas, on a $m = a$, a désignant, abstraction faite du signe, un nombre premier réel $4n + 3$. Posons de plus $k = \alpha + \beta i$. Pour obtenir la valeur de $\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]$, tout se réduit à voir si la congruence

$$(1) \quad x^2 \equiv \alpha + \beta i \pmod{a}$$

est ou n'est pas possible. Si l'on y suppose $x = \varphi + \psi i$, cette congruence se décomposera en ces deux congruences simultanées équivalentes qui ne contiennent que des entiers réels

$$(2) \quad \varphi^2 - \psi^2 \equiv \alpha, \quad 2\varphi\psi \equiv \beta \pmod{a}.$$

Ces dernières étant élevées au quarré et ajoutées donnent

$$(\varphi^2 + \psi^2)^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 \pmod{a},$$

ou ce qui revient au même, $\alpha^2 + \beta^2$ n'étant pas divisible par a,

$$(3) \quad \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{a}\right) = 1,$$

de sorte que la possibilité de la congruence (1) suppose la condition (3). Je dis réciproquement que, si cette dernière est satisfaite, la possibilité de la congruence (1), ou ce qui revient au même, celle des deux congruences simultanées (2) s'ensuit. Considérons d'abord le cas où $\alpha \equiv 0 \pmod{a}$ et dans lequel la condition (3) a évidemment lieu. On voit qu'on satisfait alors à la première des congruences (2), en posant $\psi = \pm\varphi$, ce qui change la seconde en celle-ci $2\varphi^2 \equiv \pm\beta \pmod{a}$, évidemment possible si le signe est convenablement choisi. Reste à considérer le cas où α n'est pas divisible par a. En vertu de la condition (3) supposée satisfaite, il existera un entier réel s tel qu'on ait $s^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2$, et par suite $(s + \beta)(s - \beta) \equiv \alpha^2 \pmod{a}$.

Or, a n'étant pas divisible par a, on conclut de cette dernière congruence,

$$\left(\frac{s+\beta}{a}\right)=\left(\frac{s-\beta}{a}\right)=\pm 1,$$

et nous observerons qu'on peut toujours faire en sorte que le signe supérieur ait lieu. En effet la congruence en s, d'où nous sommes partis, ne contenant que le quarré s^2, nous pouvons, lorsque le signe inférieur a lieu, remplacer s par $-s$, ce qui changera les expressions $\left(\frac{s+\beta}{a}\right)$, $\left(\frac{s-\beta}{a}\right)$ respectivement en $-\left(\frac{s-\beta}{a}\right)$, $-\left(\frac{s+\beta}{a}\right)$. On voit donc que, si s est convenablement choisi, on a

$$\left(\frac{s+\beta}{a}\right)=\left(\frac{s-\beta}{a}\right)=1.$$

Cela supposé, on pourra trouver deux entiers réels t et u tels qu'on ait

$$t^2\equiv s+\beta,\quad u^2\equiv s-\beta \pmod{a},$$

et par suite

$$(tu)^2\equiv s^2-\beta^2\equiv \alpha^2,\quad tu\equiv\pm\alpha \pmod{a},$$

le signe ambigu dépendant du choix de t et u. Ajoutons que, les entiers t et u pouvant être pairs ou impairs à volonté, il sera toujours possible de les choisir de même espèce, c'est-à-dire tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Cela fait, il est facile de voir qu'on satisfera aux congruences (2) au moyen de ces expressions entières

$$\varphi=\frac{t\pm u}{2},\quad \psi=\frac{t\mp u}{2},$$

où nous supposons que les signes soient choisis conformément à celui qui a lieu dans la congruence $tu\equiv\pm\alpha$. C'est ce dont on s'assure sans difficulté, en faisant la substitution et en ayant égard aux conditions auxquelles s, t, u sont supposés satisfaire.

Il résulte de ce qui precède, que, si l'on a $\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]=1$, il s'ensuit $\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a}\right)=1$, et que la réciproque a également lieu. On conclut de là et de ce que chacune des expressions précédentes est toujours de la forme ± 1, que, quel que soit l'entier $\alpha+\beta i$ non-divisible par le nombre premier a, on a toujours

$$(b)\qquad \left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a}\right).$$

On peut remarquer que dans le cas particulier où l'un des entiers α, β s'évanouit, on a $\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]=1$.

II. Considérons maintenant le cas où la partie imaginaire de $m = a + bi$ n'est pas zéro. Pour décider dans ce cas si la congruence $x^2 \equiv \alpha + \beta i$ (mod. m), est ou n'est pas possible, nous observerons que d'après ce qui a été prouvé plus haut sur les résidus d'un module tel que $a + bi$, pour lequel a et b sont premiers entre eux, nous pouvons considérer x comme réel. Cela étant, la congruence précédente est équivalente à l'équation $x^2 - \alpha - \beta i = (\varphi + \psi i)(a + bi)$, ou à ces équations simultanées qui ne contiennent que des entiers réels

$$(4) \qquad x^2 - \alpha = a\varphi - b\psi, \qquad -\beta = b\varphi + a\psi.$$

En les ajoutant, après les avoir multipliées par a et b, on trouve

$$(5) \qquad ax^2 - a\alpha - b\beta = p\varphi.$$

Observons maintenant que $a\alpha + b\beta$ ne saurait être divisible par p. En effet si cela était, p diviserait aussi x, ce qui est impossible en vertu de la congruence $x^2 \equiv \alpha + \beta i$ (mod. $a + bi$), dont le premier membre est comme le second, premier à $a + bi$ et par conséquent aussi à p, x étant réel. Cela étant, l'équation (5) donne

$$(6) \qquad \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a\alpha + b\beta}{p}\right).$$

Je dis maintenant que, cette équation qui est une conséquence très-simple de la congruence $x^2 \equiv \alpha + \beta i$ (mod. m), étant supposée satisfaite, la possibilité de la congruence ou ce qui revient au même, celle des équations (4), s'ensuit. En effet, la condition (6) entraine immédiatement l'équation (5), qui, en y substituant pour p sa valeur $a^2 + b^2$, se change en

$$a(x^2 - \alpha - a\varphi) = b(\beta + b\varphi).$$

Or, a et b n'ayant pas de diviseur commun, il faut qu'on ait $\beta + b\varphi = -a\psi$, ψ étant un entier, et par suite $x^2 - \alpha - a\varphi = -b\psi$, équations qui coïncident avec celles dont il s'agit de prouver la possibilité.

L'équation (6) pouvant se mettre sous la forme $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a\alpha + b\beta}{p}\right) = 1$, on voit que chacune des deux équations

$$\left[\frac{\alpha + \beta i}{a + bi}\right] = 1, \qquad \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a\alpha + b\beta}{p}\right) = 1,$$

est toujours une conséquence nécessaire de l'autre. De là et de ce que les expressions qui forment leurs premiers membres, sont toujours de la forme ± 1, on conclut

$$\left[\frac{\alpha + \beta i}{a + bi}\right] = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a\alpha + b\beta}{p}\right).$$

Cette dernière égalité peut prendre une forme plus simple, car on a toujours $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. En effet, l'équation $a^2 + b^2 = p$, donne sur le champ $\left(\frac{p}{a}\right) = 1$, si l'on fait usage du signe de *Legendre*, étendu, comme l'a proposé Mr. *Jacobi*, aux nombres composés *), et par suite, p étant positif et de la forme $4n+1$, $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Nous avons donc, quel que soit l'entier $\alpha + \beta i$ non-divisible par le nombre premier $a + bi$, dans lequel b est pair mais différent de zéro:

$$(c) \qquad \left[\frac{\alpha+\beta i}{a+bi}\right] = \left(\frac{a\alpha + b\beta}{p}\right).$$

Il importe de remarquer que l'équation (b) est tout-à-fait distincte de celle que nous venons d'établir, et ne se déduit nullement de cette dernière, en y faisant $b = 0$.

§. 7.

Nous pouvons maintenant nous occuper de la question que l'on doit regarder comme la plus importante parmi celles que la théorie des résidus quadratiques présente, et qui a pour objet, étant donné un entier complexe quelconque k, d'assigner les caractères propres à distinguer les nombres premiers impairs m dont k est résidu quadratique, de ceux auxquels cet entier a la relation opposée. Comme d'après l'équation (a) démontrée plus haut, la question proposée, lorsque k est un nombre composé, se réduit sur le champ à des questions analogues relatives aux facteurs de k, on voit que nous n'aurons à considérer que les quatre hypothèses,

$$k = \pm 1, \quad i, \quad 1+i, \quad \alpha + \beta i,$$

$\alpha + \beta i$ étant un nombre premier impair que nous pourrions considérer comme primaire, mais dans lequel nous supposerons simplement que β, qui peut d'ailleurs s'évanouir, est pair. Le premier cas ne donne lieu à aucune question, ± 1 étant un quarré. Les trois autres sont résolus par les équations qui suivent et dans lesquelles le nombre premier impair $a + bi$ est pareillement tel que b qui peut d'ailleurs se réduire à zéro, soit pair, et où

*) Les théorémes qui constituent la théorie des résidus quadratiques, en tant qu'il s'agit de nombres réels, étant généralement connus, nous nous dispenserons d'en rappeler les énoncés, lorsque nous aurons à faire usage de ces théorèmes. Quant à l'usage du signe de *Legendre*, étendu aux nombres composés, qui est moins connu, on peut sur ce point consulter le compte rendu de l'Académie de Berlin, Oct. 1837, ou le §. 2 du Mémoire déjà cité. R. a. d. a. etc.

l'on a posé pour abréger, $p = a^2 + b^2$:

$$(d)\quad \left[\frac{i}{a+bi}\right] = (-1)^{\frac{p-1}{4}},\quad \left[\frac{1+i}{a+bi}\right] = (-1)^{\frac{(a+b)^2-1}{8}},\quad \left[\frac{\alpha+\beta i}{a+bi}\right] = \left[\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}\right].$$

La première de ces équations se déduit sans difficulté, soit de la formule $k^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left[\frac{k}{m}\right]$ (mod. m) obtenue plus haut, soit des deux équations (b) et (c), si, en suivant cette dernière voie, on suppose successivement $b = 0$, et différent de zéro.

Pour démontrer la seconde des équations (d), soit d'abord $b = 0$. On a alors au moyen de l'équation (b) et d'un théorème connu,

$$\left[\frac{1+i}{a}\right] = \left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}$$

conformément à l'équation qu'il s'agit d'établir. Supposons en second lieu, b différent de zéro. L'équation (c) donne alors

$$\left[\frac{1+i}{a+bi}\right] = \left(\frac{a+b}{p}\right).$$

Pour obtenir la valeur du second membre, nous aurons recours à l'équation identique $2p = (a+b)^2 + (a-b)^2$, de laquelle on conclut successivement au moyen de théorèmes connus,

$$\left(\frac{p}{a+b}\right) = \left(\frac{2}{a+b}\right),\quad \left(\frac{a+b}{p}\right) = \left(\frac{2}{a+b}\right) = (-1)^{\frac{(a+b)^2-1}{8}},$$

ce qui s'accorde également avec l'équation que nous nous proposions de vérifier.

La démonstration de la troisième des équations (d), à laquelle nous arrivons maintenant et qui exprime une loi de réciprocité entre deux nombres premiers impairs différents, c'est-à-dire ni égaux ni opposés, donne lieu à distinguer trois cas. Le premier de ces cas est celui où b et β sont tous les deux égaux à zéro. Dans ce premier cas, la vérité de l'équation est évidente, puisque d'après la formule (b) on a à la fois $\left[\frac{\alpha}{a}\right] = 1$, $\left[\frac{a}{\alpha}\right] = 1$. Considérons en second lieu, le cas où l'un des entiers b et β se réduit à zéro, et soit β cet entier évanouissant, ce que la forme symétrique de notre équation permet évidemment de supposer. On a alors en vertu des équations (c) et (b) et d'après une remarque déjà faite,

$$\left[\frac{\alpha}{a+bi}\right] = \left(\frac{a\alpha}{p}\right) = \left(\frac{\alpha}{p}\right),\quad \left[\frac{a+bi}{\alpha}\right] = \left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

de sorte que la vérification à effectuer résulte de l'équation connue

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right) = \left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Passant enfin au troisième cas où b et β sont l'un et l'autre différents de zéro, on appliquera la formule (c) à chacun des deux membres de l'équation qu'il s'agit de prouver et qui deviendra ainsi

$$\left(\frac{a\alpha + b\beta}{p}\right) = \left(\frac{a\alpha + b\beta}{\varpi}\right),$$

en posant pour un instant, $\alpha^2 + \beta^2 = \varpi$. Pour s'assurer de la vérité de cette dernière, il suffit de recourir à l'équation identique $(a\alpha + b\beta)^2 + (b\alpha - a\beta)^2 = p\varpi$, d'où il suit successivement, $a\alpha + b\beta$ étant impair,

$$\left(\frac{p}{a\alpha + b\beta}\right) = \left(\frac{\varpi}{a\alpha + b\beta}\right), \quad \left(\frac{a\alpha + b\beta}{p}\right) = \left(\frac{a\alpha + b\beta}{\varpi}\right) \text{ c. q. f. p.}$$

Nous ne terminerons pas ce §. sans observer que les équations (d) sont dues à Mr. *Gaufs* qui les a données sans démonstration, du moins la dernière, dans le Mémoire cité plus haut. La démonstration que nous venons de développer et qui avait déjà été indiquée dans un Note insérée dans ce Journal, est, comme on voit, une application très-simple des théorèmes (b) et (c), qui indépendamment de l'usage que nous en faisons ici, nous seront indispensables pour la solution de la question qui fait le principal sujet du présent Mémoire.

§. 8.

Le symbole $\left[\frac{k}{m}\right]$, tel que nous l'avons employé jusqu'à présent, suppose que m est un nombre premier impair. Il arrive souvent qu'on a à considérer des produits de la forme

$$\left[\frac{k}{m}\right]\left[\frac{k}{m'}\right]\left[\frac{k}{m''}\right]\ldots,$$

où $m, m', m'', \ldots$ sont des nombres premiers impairs non-diviseurs de k, mais d'ailleurs égaux ou inégaux. Soit $M = mm'm'' \ldots$ et convenons de désigner désormais le produit précédent simplement par

$$\left[\frac{k}{M}\right]$$

de sorte que la valeur de notre symbole ainsi généralisé, toujours égale soit à $+1$ soit à -1, n'indiquera plus suivant ces deux cas, si k est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à M, et fera seulement connaître, si parmi les facteurs simples égaux ou inégaux de M, il y en a un nombre

pair ou impair, auxquels k présente la dernière dé ces deux relations. L'extension que nous venons d'indiquer et qui est entièrement semblable à celle que Mr. *Jacobi* a proposée relativement au signe de *Legendre* et dont nous avons déjà fait un fréquent usage dans ce qui précède, donne lieu à plusieurs théorèmes analogues à ceux demontrés dans le §. précédent et faciles à déduire de ces derniers. On a d'abord évidemment

$$(e)\quad \left[\frac{k}{M}\right]=\left[\frac{l}{M}\right],\quad \left[\frac{kk'}{M}\right]=\left[\frac{k}{M}\right]\left[\frac{k'}{M}\right],\quad \left[\frac{k}{MM'}\right]=\left[\frac{k}{M}\right]\left[\frac{k}{M'}\right],$$

équations qui supposent, la première, que k toujours sans diviseur commun avec l'entier impair M, est tel qu'on ait $k\equiv l$ (mod. M), la seconde que k et k' sont premiers à M, et enfin la troisième que k est premier aux entiers impairs M et M'.

Voici maintenant les équations analogues aux équations (d), ou pour mieux dirs, d'une forme toute identique avec ces dernières:

$$(f)\quad \left[\frac{i}{A+Bi}\right]=(-1)^{\frac{P-1}{4}},\quad \left[\frac{1+i}{A+Bi}\right]=(-1)^{\frac{(A+B)^2-1}{8}},\quad \left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right]=\left[\frac{A+Bi}{\alpha+\beta i}\right]$$

Dans ces équations $A+Bi$ et $\alpha+\beta i$ sont deux entiers complexes impairs quelconques premiers entre eux et pour lesquels les coëfficients B et β, toujours considérés comme pairs, peuvent se réduire à zéro. On a d'ailleurs $P=A^2+B^2$.

La première de ces équations coïncidant avec la première des équations (d) déjà établies, lorsque $A+Bi$ se réduit au nombre premier $a+bi$, on voit que pour s'assurer qu'elle a généralement lieu, tout se réduit à faire voir que, si on la suppose exacte pour un nombre quelconque $A+Bi$, elle ne cessera pas de subsister lorsque ce dernier vient a être remplacé par le produit $(a+bi)(A+Bi)=A'+B'i$. Nous avons donc à faire voir que la troisième des équations

$$\left[\frac{i}{a+bi}\right]=(-1)^{\frac{p-1}{4}},\quad \left[\frac{i}{A+Bi}\right]=(-1)^{\frac{P-1}{4}},\quad \left[\frac{i}{A'+B'i}\right]=(-1)^{\frac{P'-1}{4}},$$

où l'on suppose $p=a^2+b^2$, $P'=A'^2+B'^2$, est une conséquence des deux premières. Il suffit évidemment pour cela, de prouver que les deux entiers réels

$$\frac{p-1}{4}+\frac{P-1}{4},\quad \frac{P'-1}{4}$$

sont toujours de même espèce, c'est-à-dire tous les deux pairs ou tous les deux impairs. C'est ce qui résulte sur le champ de l'équation identique

$$\frac{Pp-1}{4}-\frac{p-1}{4}-\frac{P-1}{4}=\frac{(P-1)(p-1)}{4}$$

dont le second membre est pair et même divisible par 4, P et p étant de la forme $4n+1$.

Le même moyen de démonstration peut s'appliquer à la seconde des équations (f), et l'on voit qu'il s'agira ainsi de démontrer que les deux nombres

$$\frac{(a+b)^2-1}{8}+\frac{(A+B)^2-1}{8},\quad \frac{(A'+B')^2-1}{8}$$

sont toujours de même espèce. Observons pour cela qu'en vertu de l'équation identique

$$\frac{(rs)^2-1}{8}-\frac{r^2-1}{8}-\frac{s^2-1}{8}=\frac{(r^2-1)(s^2-1)}{8},$$

dont le second membre est pair, si r et s sont des entiers impairs, le premier des deux entiers que nous avons à considérer, est de même espèce que $\frac{((a+b)(A+B))^2-1}{8}$. Mais, comme d'un autre côté deux quarrés dont les racines diffèrent d'un multiple de 8, diffèrent eux-mêmes d'un multiple de 16, ce dernier est à son tour de même espèce que

$$\frac{((a+b)(A+B)-2Bb)^2-1}{8}=\frac{(A'+B')^2-1}{8},$$

et l'assertion avancée se trouve établie.

La troisième des équations (f) est également très-facile à établir. En effet, d'apres l'hypothèse faite sur les entiers $A+Bi$, $\alpha+\beta i$, ils peuvent se décomposer l'un et l'autre en facteurs simples ayant leurs parties réelles impaires. Soit n l'un des facteurs de $A+Bi$, et m l'un de ceux de $\alpha+\beta i$, on pourra par l'emploi répété des deux dernières des équations (e), remplacer l'expression $\left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right]$ par un produit d'expressions de la forme $\left[\frac{m}{n}\right]$, où tout facteur m doit être combiné avec tout facteur n. Or, si maintenant on remplace tout symbole $\left[\frac{m}{n}\right]$ par celui-ci $\left[\frac{n}{m}\right]$ qui lui est équivalent en vertu de la troisième des équations (d), et que l'on effectue la multiplication au moyen des équations déjà citées, le premier membre de l'équation qu'il s'agit de vérifier, se trouvera identique au second.

Il reste à opérer d'une manière générale la réduction qui pour le cas particulier d'un nombre premier $a+bi$, peut s'obtenir au moyen des

équations (b) et (c) du §. précédent. Soit $A+Bi$ un entier impair quelconque (B étant pair et pouvant se réduire a zéro) et $\alpha+\beta i$ un second entier assujetti à la condition unique d'être premier à $A+Bi$; il s'agira de remplacer l'expression $\left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right]$ par des expressions analogues ne contenant que des entiers réels. Considérons d'abord le cas où B s'évanouit, et celui où A et B n'ont pas de diviseur commun; nous verrons ensuite que le cas le plus général se réduit immédiatement à ceux-là. Relativement aux deux cas qui viennent d'être indiqués, on a respectivement

$$(g)\quad \left[\frac{\alpha+\beta i}{A}\right] = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{A}\right),\quad \left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right] = \left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right),$$

P désignant pour abréger dans la seconde de ces équations, le binome A^2+B^2. Pour démontrer la première, observons qu'on peut y considérer A comme positif, les deux membres ne changeant pas lorsqu'on y remplace A par $-A$. Cela posé, soit

$$A = \mathrm{a}\mathrm{a}' \ldots, \times pp' \ldots,$$

a, a', ...; p, p', ... désignant des nombres premiers réels et positifs, les premiers de la forme $4n+3$, les seconds de la forme $4n+1$.

D'après l'équation (b), chacun des premiers donne une équation telle que

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{\mathrm{a}}\right] = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\mathrm{a}}\right),$$

tandis que pour chacun des derniers, p par exemple, qui peut se décomposer en deux facteurs premiers binomes $(a+bi)(a-bi)$, où b est supposé pair, on a en vertu de l'équation (c),

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{p}\right] = \left[\frac{\alpha+\beta i}{a+bi}\right]\left[\frac{\alpha+\beta i}{a-bi}\right] = \left(\frac{a\alpha+b\beta}{p}\right)\left(\frac{a\alpha-b\beta}{p}\right) = \left(\frac{a^2\alpha^2-b^2\beta^2}{p}\right),$$

et par suite, puisque $-b^2 \equiv a^2 \pmod{p}$,

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{p}\right] = \left(\frac{a^2}{p}\right)\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{p}\right) = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{p}\right).$$

Ces deux systèmes d'équations étant multipliés entre eux, donnent la formule qu'il s'agissait d'etablir.

Passons a la verification de la seconde des équations précédentes.

Nous supposerons d'abord $\beta = 0$, cas auquel celui où β n'est pas zero, se ramène facilement. Comme par hypothèse, A et B n'ont pas de diviseur

commun, on pourra poser

$$A + Bi = (a + bi)(a' + b'i) \ldots,$$

où les facteurs du second membre désignent des nombres premiers binomes, dans lesquels b, b', ... sont supposés pairs. L'équation (c) donne relativement au facteur $a + bi$,

$$\left[\frac{\alpha}{a+bi}\right] = \left(\frac{a\alpha}{p}\right) = \left(\frac{\alpha}{p}\right)$$

en posant pour abréger $a^2 + b^2 = p$. En faisant le produit de cette équation et des équations analogues, il viendra

$$\left[\frac{\alpha}{A+Bi}\right] = \left(\frac{\alpha}{pp'\ldots}\right) = \left(\frac{\alpha}{P}\right).$$

Or, l'équation qu'il s'agit de prouver se réduisant par la supposition $\beta = 0$, a celle-ci

$$\left[\frac{\alpha}{A+Bi}\right] = \left(\frac{A\alpha}{P}\right) = \left(\frac{A}{P}\right)\left(\frac{\alpha}{P}\right),$$

nous n'avons plus qu'à démontrer qu'on a $\left(\frac{A}{P}\right) = 1$. Mais, comme A et B sont premiers entre eux, il résulte de l'équation $A^2 + B^2 = P$, que A et P sont pareillement sans diviseur commun, de sorte que $\left(\frac{P}{A}\right) = 1$, et par suite $\left(\frac{A}{P}\right) = 1$.

Reste à considérer le cas où β a une valeur différente de zéro. On cherchera alors un entier réel s tel qu'on ait

$$s \equiv \alpha + \beta i \pmod{A + Bi},$$

dont l'existence suit de l'hypothèse admise sur les nombres A et B. Cela fait, on aura

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right] = \left[\frac{s}{A+Bi}\right]$$

et par suite, en vertu du cas déjà démontré,

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right] = \left(\frac{As}{P}\right).$$

D'un autre côté, si l'on remplace la congruence précédente par deux équations équivalentes, on reconnait sur le champ que s satisfait à la condition

$$As \equiv A\alpha + B\beta \pmod{P}.$$

Cela étant, cette dernière congruence donne l'équation

$$\left(\frac{As}{P}\right) = \left(\frac{A\alpha + B\beta}{P}\right),$$

dont la comparaison avec celle obtenue plus haut, donne un résultat qui

s'accorde avec la seconde des formules (g). Il nous reste enfin à supposer l'entier impair $A+Bi$ tout-à-fait arbitraire, si ce n'est que nous considérons toujours B comme pair, ce qui ne nuit en rien à la généralité. Soit L le plus grand diviseur commun (réel) de A et B, et posons $A = A'L$, $B = B'L$, $A'^2 + B'^2 = P'$. L'expression $\left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right]$ dans laquelle $\alpha+\beta i$ n'est assujetti qu'à la seule condition d'être premier à $A+Bi$, se décomposera alors dans les deux facteurs

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{L}\right]\left[\frac{\alpha+\beta i}{A'+B'i}\right]$$

respectivement de même forme que les premiers membres des équations (g), et l'on aura en conséquence:

$$(h) \quad \left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right] = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{L}\right)\left(\frac{A'\alpha+B'\beta}{P'}\right).$$

§. 9.

Nous terminerons ce que nous avons à dire sur les résidus quadratiques, en considérant la congruence

$$(1) \quad x^2 \equiv k \pmod{m},$$

où k et m sont des entiers complexes quelconques premiers entre eux et le second de plus impair. Pour que cette congruence soit possible, il faut évidemment qu'elle puisse subsister par rapport à chacun des facteurs simples de m. Soient

$$f,\ f',\ f'',\ \ldots.$$

les nombres premiers primaires inégaux qui divisent m et soit μ leur nombre. Il faudra donc qu'on ait

$$(2) \quad \left[\frac{k}{f}\right] = 1,\ \left[\frac{k}{f'}\right] = 1,\ \left[\frac{k}{f''}\right] = 1,\ \ldots.$$

Je dis de plus que, ces conditions ayant lieu, la possibilité de la congruence s'ensuit et que le nombre de ses racines sera 2^μ, en considérant à l'ordinaire comme ne constituant qu'une seule racine, les entiers en nombre infini qui diffèrent les uns des autres de multiples du module m. Considérons d'abord la congruence $x^2 \equiv k \pmod{f^h}$, l'exposant étant un nombre positif quelconque. Si l'on y satisfait par la supposition $x = a$, et par suite par l'hypothèse plus générale $x = a + tf^h$, t étant un entier arbitraire, il est facile d'en déduire une solution pour la congruence de même forme, mais relative au module f^{h+l} où l'on suppose $l \leqq h$. En effet,

la substitution de l'expression de x donnant

$$\frac{x^2-k}{f^h} = \frac{\alpha^2-k}{f^h} + 2\alpha t + t^2 f^h,$$

où le premier terme du second membre est par hypothèse un entier, on voit que pour satisfaire à la congruence $x^2 \equiv k$ (mod. f^{h+l}), il reste à faire en sorte qu'on ait $2\alpha t \equiv -\frac{\alpha^2-k}{f^h}$ (mod. f^l), ce qui est toujours possible, α et par suite 2α étant évidemment premier au module. Comme on peut par ce procédé, s'élever à des exposants de plus en plus grands, en partant de l'exposant $h=1$, on voit que la condition de possibilité de la congruence

$$x^2 \equiv k \pmod{f^h},$$

quel que soit h, est la même que celle qui se rapporte à $h=1$, et qui consiste en ce que l'on doit avoir $\left[\frac{k}{f}\right] = 1$. Voyons maintenant quel est le nombre des racines de la congruence précédente. En considérant toujours α comme une de ses racines, on pourra lui donner la forme

$$x^2-\alpha^2 = (x+\alpha)(x-\alpha) \equiv 0 \pmod{f^h}.$$

Or, $x+\alpha$ et $x-\alpha$ ne pouvant être simultanément divisibles par f, on voit qu'on ne peut satisfaire à cette dernière qu'en supposant

$$x \equiv \alpha \quad \text{ou} \quad x \equiv -\alpha \pmod{f^h},$$

ce qui ne donne que deux racines, qui seront toujours distinctes, leur différence 2α n'étant pas divisible par f.

Si maintenant l'on observe que, si l'on pose $m = i^e f^h f'^{h'} \ldots .$, la congruence (1) est évidemment équivalente à ces congruences simultanées

$$x \equiv k \pmod{f^h}, \quad x \equiv k \pmod{f'^{h'}}, \quad \ldots .$$

dont chacune, en vertu de ce qui précède, admet deux racines distinctes de la forme $\pm\alpha$, on conclura facilement d'après la remarque faite plus haut §. 5, IV, que la congruence (1) admet elle-même 2^μ racines distinctes, lorsque les conditions (2), nécessaires pour sa possibilité, sont toutes remplies. Il est bon d'ajouter que dans le cas où m est de la forme i^e, et où il n'y a aucune condition à remplir, le nombre des solutions de la congruence (1) est toujours exprimé par la formule 2^μ, car on a dans ce cas, $\mu = 0$.

Théorèmes fondamentaux sur les formes quadratiques.

§. 10.

Avant d'entrer dans le sujet indiqué par le titre, il convient de faire une remarque nécessaire pour que l'exposition qu'on va lire, soit considérée sous son véritable point de vue. L'objet du présent mémoire étant purement théorique, nous avons cherché à résoudre les questions que nous avions à traiter, par les considérations qui, théoriquement parlant, nous ont paru les plus simples, sans nous attacher à rendre les solutions qui en dérivent, propres au calcul numérique. Pour satisfaire à cette dernière condition, il faudrait entrer dans des développements assez étendus, qui ne présenteraient que très-peu d'intérêt et ne seraient d'ailleurs d'aucune utilité pour l'objet que nous avons en vue et qui, comme nous l'avons déjà dit, est de pure théorie. Limités comme nous venons de l'indiquer, les éléments de la théorie des formes quadratiques à coëfficients et à indéterminées complexes, peuvent être présentés dans un petit nombre de pages, si aux moyens déjà employés par les illustres géomètres qui ont fondé ou perfectionné la théorie analogue relative aux entiers réels, on ajoute quelques principes nouveaux, qui nous paraissent mériter l'attention des géomètres par leur extrême fécondité qui ne sera toutefois mise dans tout son jour que par des recherches ultérieures que nous avons entreprises sur les formes des degrés supérieurs et que nous aurons à exposer plus tard.

Toute expression telle que

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

où a, b, c sont des entiers complexes déterminés, et x, y de pareils entiers indéterminés, est ce que nous appellerons une *forme quadratique binaire* ou simplement une *forme,* cette abréviation ne pouvant donner lieu ici à aucune ambiguité. Il est essentiel de suivre un ordre fixe tant par rapport aux indéterminées x et y, qui seront respectivement nommées la première et la seconde, que par rapport aux coëfficients a, b, c, dont la désignation indiquera toujours la place que ces coëfficients occupent dans l'expression que nous venons d'écrire.

Les propriétés de la forme (1), dépendant principalement du nombre D, donné par l'équation $D = b^2 - ac$, ce nombre sera dit le *déterminant* de la forme en question. Dans le cas particulier où D est un quarré, ce

qui comprend la supposition de $D = 0$, la forme se décompose évidemment en deux facteurs linéaires à coëfficients rationnels, en sorte que ses propriétés se déduisent facilement de celles bien connues des expressions de ce genre. C'est pourquoi nous ferons toujours abstraction de ce cas particulier. Sous cette restriction, les coëfficients extrêmes a et c sont l'un et l'autre différents de zéro, d'où il suit que l'un d'entre eux, c par exemple, peut se déduire sans indétermination de l'autre a, du coëfficient moyen b et du déterminant D, supposés connus, au moyen de la formule $c = \frac{b^2 - D}{a}$.

Si dans la forme (1) on remplace les indéterminés x et y, par de nouvelles indéterminées x' et y', liées aux premières par les équations

$$(2) \qquad x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y',$$

où α, β, γ, δ sont des entiers donnés, elle se changera en cette autre

$$(3) \qquad a' x'^2 + 2 b' x' y' + c' y'^2,$$

où l'on a

$$(4) \qquad a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \qquad b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta,$$
$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2,$$

et l'on dit alors que la nouvelle forme (3) est contenue sous la forme primitive (1). En substituant les coëfficients a', b', c' de la forme (3), dans l'expression de son déterminant D', il viendra

$$(5) \qquad D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D.$$

On voit ainsi qu'une forme contenue sous une autre, a toujours un déterminant multiple de celui de cette dernière, et que le quotient de ces déterminants est un quarré, d'où il suit que, pour que deux formes puissent se contenir mutuellement, il faut nécessairement que leurs déterminants soient ou égaux ou opposés. Réciproquement, si les déterminants de deux formes telles que (1) et (3), sont égaux ou opposés, et qu'en outre la première contienne la seconde, je dis que celle-ci contiendra la première. Pour le prouver, remarquons que l'hypothèse $D' = \pm D$, comparée à l'équation (5), donne celle-ci

$$(6) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = i^{\varrho},$$

les déterminants égaux à zéro étant toujours exclus. Si maintenant l'on résout les équations (2) par rapport à x' et y', on obtiendra les expressions

$$(7) \qquad x' = \frac{\delta}{i^{\varrho}} x - \frac{\beta}{i^{\varrho}} y, \qquad y' = -\frac{\gamma}{i^{\varrho}} x + \frac{\alpha}{i^{\varrho}} y,$$

dont les quatre coëfficients sont entiers, et qui, étant introduites dans la

forme (3), la feront évidemment coïncider avec la forme (1), ce qu'il s'agissait de prouver.

Deux formes dont chacune contient l'autre, sont dites *équivalentes.* Quoique la relation mutuelle de deux formes, exprimée par cette désignation, puisse subsister aussi bien entre deux formes à déterminants opposés qu'entre deux formes dont les déterminants sont égaux, nous nous bornerons à considérer le dernier de ces deux cas. Il est en effet facile de voir que ces deux cas ne sont pas essentiellement différents, puisque, étant données deux formes qui répondent au premier, il suffit évidemment de multiplier les trois coëfficients de l'une d'entre elles respectivement par 1, i, -1, pour que le groupe des deux formes rentre dans le second de ces deux cas.

La définition de l'équivalence ainsi restreinte, donne encore lieu à une nouvelle subdivision qu'il est essentiel de prendre en considération. Comme on a $D' = D$, et par suite en vertu de l'équation (5),

$$(8) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 = \varepsilon,$$

nous pouvons avoir égard au signe dont l'unité est précédée dans cette équation; nous dirons désormais que la substitution donnée par les formules (2), et qui change la forme (1) dans la forme équivalente (3), est propre ou impropre, suivant que le signe supérieur ou le signe inférieur a lieu dans l'équation (8). Observons d'abord que la substitution inverse (7) qui sert à revenir de la forme (3) à la forme (1), et qui pour le cas qui nous occupe, se réduit à poser

$$x' = \frac{\delta}{\varepsilon}x - \frac{\beta}{\varepsilon}y, \quad y' = -\frac{\gamma}{\varepsilon}x + \frac{\alpha}{\varepsilon}y$$

sera toujours de même nom que celle dont nous venons de parler. Il suffit pour s'en assurer, de remplacer dans l'expression (8) les entiers α, β, γ, δ respectivement par $\frac{\delta}{\varepsilon}$, $-\frac{\beta}{\varepsilon}$, $-\frac{\gamma}{\varepsilon}$, $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, ce qui changera cette expression en

$$\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Les deux substitutions étant de même nature quant à la distinction que nous venons de faire, on peut transporter la dénomination précédente au groupe des deux formes et appeler l'équivalence de ces formes propre ou impropre suivant que la valeur de ε, commune aux deux substitutions en question, est $+1$ ou -1. Il n'est pas nécessaire pour notre objet de considérer l'équivalence impropre qui au reste se change toujours en équivalence

propre, si dans l'une des formes on change le signe du coëfficient moyen. En disant donc désormais que deux formes sont équivalentes, nous entendrons toujours qu'il s'agit de l'équivalence propre, ou autrement dit, qu'on peut passer de chacune de ces formes à l'autre, par une substitution telle que (2), où l'on a $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Pareillement, quand nous nous proposerons de découvrir toutes les transformations qui changent ces formes l'une dans l'autre, nous n'aurons en vue que celles qui satisfont à la condition précédente, et nous rejetterons toutes celles pour lesquelles on aurait $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$. Comme dans ce qui va suivre, il sera le plus souvent inutile de désigner les indéterminées par des lettres particulières, nous conviendrons d'indiquer une forme telle que (1), ou une substitution telle que (2), par ces notations abrégées

$$(a,\ b,\ c),\quad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}.$$

La notion de l'équivalence telle que nous venons de la fixer, donne lieu à ces théorèmes très-simples

I. Toute forme est équivalente à elle-même, puisqu'il est évident qu'elle ne varie pas, si on lui applique la subst. $\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$.

II. Deux formes qui équivalent à une troisième, sont équivalentes entre elles. En effet, si la forme f, supposée équivalente à f', se transforme en celle-ci au moyen de la subst. $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, et si celle-ci devient à son tour identique avec f'', au moyen de la subst. $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$, on passera évidemment de f à f'', si l'on fait usage de la subst. unique $\begin{pmatrix}\alpha'', & \beta''\\ \gamma'', & \delta''\end{pmatrix}$, où l'on a

$$\alpha''=\alpha\alpha'+\beta\gamma',\qquad \beta''=\alpha\beta'+\beta\delta',$$
$$\gamma''=\gamma\alpha'+\delta\gamma',\qquad \delta''=\gamma\beta'+\delta\delta',$$

et il ne reste plus qu'à prouver qu'on a $\alpha''\delta''-\beta''\gamma''=1$. Mais cette équation résulte sur le champ de l'équation identique

$$\alpha''\delta''-\beta''\gamma''=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha'\delta'-\beta'\gamma'),$$

où l'on a par hyp., $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, et $\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1$.

La subst. $\begin{pmatrix}\alpha'', & \beta''\\ \gamma'', & \delta''\end{pmatrix}$, qui produit le même effet que les deux subst. $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$, employées l'une après l'autre, peut s'appeler convenablement une substitution composée, où il importe de remarquer que l'ordre des substitutions composantes ne peut pas être interverti.

III. Deux formes (a, b, c) et (a', b', c') étant supposées équivalentes, le plus grand diviseur commun des entiers a, b, c est le même que celui des entiers a', b', c', et la même égalité subsiste entre les deux groupes $a, 2b, c$, et $a', 2b', c'$.

Comme l'équivalence admise suppose une transformation telle que (2), et par suite les équations (4), on voit immédiatement que tout diviseur commun de a, b, c, divise aussi a', b', c', et l'on arrive à un résultat semblable relativement aux groupes $a, 2b, c$, et $a', 2b', c'$, si préalablement on suppose les deux membres de la seconde des équations (4), multipliés par 2. Un raisonnement analogue pouvant se faire en sens inverse, la proposition énoncée se trouve établie.

Nous observerons qu'il serait inutile de considérer des formes (a, b, c) pour lesquelles le plus grand diviseur commun σ de leurs coëfficients a, b, c différerait de l'unité, puisque de pareilles formes ne sont évidemment que des formes du déterminant $\frac{D}{\sigma^2}$, affectées du facteur entier σ. Nous supposerons donc toujours a, b, c, libres de tout diviseur commun; cela étant, le plus grand diviseur commun de $a, 2b, c$, que nous désignerons constamment par ω, ne peut avoir que l'une des trois valeurs 1, $1+i$ ou 2, ce qui donne lieu à diviser les formes quadratiques en trois espèces, appelées suivant l'ordre des cas énoncés, la première, la seconde ou la troisième, de sorte que des formes équivalentes sont toujours de même espèce.

§. 11.

Relativement à l'équivalence des formes, il se présente deux questions principales à résoudre. Étant données deux formes ayant le même déterminant et appartenant à la même espèce, on peut demander 1° si ces formes sont équivalentes ou non, et l'équivalence supposée reconnue, on peut se proposer 2° d'assigner toutes les substitutions par lesquelles ces formes se transforment l'une dans l'autre. Nous ne sommes pas pour le moment en mesure d'aborder la première de ces deux questions; mais nous pouvons traiter dès-à-présent la seconde, en la posant comme il suit:

„Etant données deux formes équivalentes ainsi qu'une transformation „de la première dans la seconde, trouver toutes les transformations „qui produisent le même effet."

I. La question énoncée peut se réduire à une autre plus simple et

qui n'est au fond qu'une question particulière, mais de même nature que la proposée. Cette question particulière consiste à assigner toutes les substitutions par lesquelles une forme donnée se change en elle-même ou autrement dit, reste invariable quant à ses coëfficients. Pour le prouver, soit

$$(1) \quad \binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$$

la subst. donnée par laquelle la première f des formes données se change dans la seconde f'. Si maintenant l'on désigne par

$$(2) \quad \binom{\lambda,\ \mu}{\nu,\ \varrho}$$

une subst. quelconque qui, étant appliquée à la forme f, reproduise cette même expression, il résulte du §. précédent II., que par la subst. composée des précédentes, rangées dans l'ordre (2), (1),

$$(3) \quad \binom{\alpha',\ \beta'}{\gamma',\ \delta'}$$

où l'on a

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha' = \alpha\lambda + \gamma\mu, & \beta' = \beta\lambda + \delta\mu, \\ \gamma' = \alpha\nu + \gamma\varrho, & \delta' = \beta\nu + \delta\varrho, \end{cases}$$

f se change en f'. Cela posé, je dis que, si dans les équations (4.) on introduit successivement toutes les subst. (2), on obtiendra toutes les transformations possibles de f en f', et de plus que chacune d'entre elles ne se présentera ainsi qu'une seule fois. Pour prouver d'abord ce dernier point, il suffit d'observer que les équations (4), en y considérant λ, μ, ν, ϱ comme des inconnues, donnent ces valeurs complétement déterminées:

$$\lambda = \delta\alpha' - \gamma\beta', \quad \mu = \alpha\beta' - \beta\alpha',$$
$$\nu = \delta\gamma' - \gamma\delta', \quad \varrho = \alpha\delta' - \beta\gamma'.$$

Reste à faire voir qu'il n'existe aucune transformation $\binom{\alpha',\ \beta'}{\gamma',\ \delta'}$ de f en f', qui ne soit contenue dans les formules (4), en y considérant λ, μ, ν, ϱ, généralement comme les coëfficients des subst. (2) définies plus haut.

Comme la résolution des équations en question a donné des valeurs entières, et que d'un autre côté, on conclut de l'équation identique

$$(\lambda\varrho - \mu\nu)(\alpha\delta - \beta\gamma) = \alpha'\delta' - \beta'\gamma',$$

combinée avec celles-ci

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \qquad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

que l'on a aussi $\lambda\varrho - \mu\nu = 1$, tout revient évidemment à s'assurer que la subst. $\binom{\lambda,\ \mu}{\nu,\ \varrho}$ formée avec les entiers λ, μ, ν, ϱ, donnés par la résolution effectuée,

est en effet l'une de celles qui changent la forme f en elle-même. Désignant pour un instant par χ, la forme encore inconnue dans laquelle f se transforme par la subst. dont il s'agit, on voit d'abord que χ devient f' au moyen de la subst. $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$, et que par suite f' se change en χ au moyen de la subst. inverse $\begin{pmatrix}\delta, -\beta\\ -\gamma, \alpha\end{pmatrix}$. Mais d'un autre côté, cette dernière change aussi f' en f, d'où il suit qu'on a $f=\chi$, ce qu'il s'agissait de prouver.

II. Tout se réduit donc à découvrir toutes les substitutions $\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \nu, & \varrho\end{pmatrix}$ par lesquelles la forme donnée $f=(a, b, c)$, se change en elle-même. Pour résoudre cette question, il s'agira d'assigner toutes les valeurs entières λ, μ, ν, ϱ telles qu'en remplaçant dans l'expression

$$ax^2+2bxy+cy^2,$$

ou ce qui revient au même, a différant de zéro, dans celle-ci

$$a(ax^2+2bxy+cy^2),$$

x et y respectivement par $\lambda x+\mu y$ et $\nu x+\varrho y$, cette expression reste identiquement la même. Nous ferons d'abord abstraction de la condition $\lambda\varrho-\mu\nu=1$, toujours exigée dans les transformations que nous employons, et de plus nous considérerons λ, μ, ν, ϱ comme susceptibles de valeurs rationnelles quelconques. La question ainsi généralisée une fois résolue, il sera facile d'avoir égard aux conditions jusque-là négligées. L'expression dont il s'agit, se décompose en ces deux facteurs linéaires:

$$(ax+(b+\sqrt{D})y)(ax+(b-\sqrt{D})y),$$

où nous entendons par $\sqrt{D}$ une valeur déterminée, mais qui peut être arbitrairement choisie parmi les deux valeurs opposées généralement comportées par un radical quarré. La substitution indiquée change le produit précédent en celui-ci:

$$[(a\lambda+b\nu+\nu\sqrt{D})x+(a\mu+b\varrho+\varrho\sqrt{D})y][(a\lambda+b\nu-\nu\sqrt{D})x+(a\mu+b\varrho-\varrho\sqrt{D})y].$$

Désignant pour un instant les huit coëfficients par des lettres particulières, en posant $p=a$, $q=b+\sqrt{D}$, ..., $p'=a\lambda+b\nu+\nu\sqrt{D}$, ..., l'égalité qu'il s'agit d'établir entre ces deux produits, s'écrira ainsi:

$$(px+qy)(rx+sy) = (p'x+q'y)(r'x+s'y).$$

Or, les quatre constantes p, q, r, s données étant évidemment toutes différentes de zéro, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'identité de ces deux expressions, exigent évidemment qu'on ait 1° $\frac{p'r'}{pr}=1$, et en

outre 2° l'un ou l'autre de ces deux systèmes d'équations

$$\frac{p'}{p}=\frac{q'}{q},\quad \frac{r'}{r}=\frac{s'}{s};\qquad \frac{r'}{p}=\frac{s'}{q},\quad \frac{p'}{r}=\frac{q'}{s}.$$

Si maintenant, suivant qu'il s'agit du premier ou du second cas, on pose

$$\frac{p'}{p}=\Phi+\Psi\sqrt{D},\quad \text{ou}\quad \frac{r'}{p}=\Phi+\Psi\sqrt{D},$$

où nous supposons Φ et Ψ rationnels, ce qui est permis, les coëfficients p, q, ... ne renfermant que la seule irrationnelle $\sqrt{D}$, on aura respectivement

$$\frac{r'}{r}=\Phi-\Psi\sqrt{D},\quad \text{ou}\quad \frac{p'}{r}=\Phi-\Psi\sqrt{D},$$

et l'équation $\frac{p'r'}{pr}=1$, commune aux deux cas, prendra la forme

$$(5)\qquad \Phi^2-D\Psi^2=1.$$

Quant à l'autre condition exprimée par deux équations, il suffit d'écrire pour l'un et l'autre cas, la première de ces deux équations, celle-ci comprenant virtuellement la seconde qui n'en diffère que par le signe du radical. On aura donc suivant les deux cas

$$\frac{a\lambda+b\nu+\nu\sqrt{D}}{a}=\frac{a\mu+b\varrho+\varrho\sqrt{D}}{b+\sqrt{D}}=\Phi+\Psi\sqrt{D},$$

ou

$$\frac{a\lambda+b\nu-\nu\sqrt{D}}{a}=\frac{a\mu+b\varrho-\varrho\sqrt{D}}{b+\sqrt{D}}=\Phi+\Psi\sqrt{D}.$$

En égalant séparément dans ces formules les parties rationnelles et les coëfficients de $\sqrt{D}$, et en résolvant ensuite les équations que l'on obtient ainsi, par rapport à λ, μ, ν, ϱ, on trouve sans indétermination et suivant les deux cas:

$\lambda=\Phi-b\Psi,$	$\lambda=\Phi+b\Psi,$
$\mu=-c\Psi,$	$\mu=\frac{2b}{a}\Phi+\frac{b^2+D}{a}\Psi,$
$\nu=a\Psi,$	$\nu=-a\Psi,$
$\varrho=\Phi+b\Psi,$	$\varrho=-\Phi-b\Psi.$

On voit donc que toutes les valeurs rationnelles λ, μ, ν, ϱ qui satisfont à la condition d'invariabilité exigée, sont données par ces deux systèmes de formules très-simples, où Φ et Ψ désignent généralement toutes les valeurs rationnelles simultanées compatibles avec l'équation (5). Il s'agit maintenant d'avoir égard aux conditions que nous avons négligées, et dont l'une est exprimée par l'équation $\lambda\varrho-\mu\nu=1$. La substitution des expressions

précédentes montre par un calcul très-simple, que le premier système y satisfait, tandis que relativement au second, on trouve $\lambda\varrho-\mu\nu=-1$. Ce dernier devant ainsi être rejeté, il ne reste plus qu'à examiner sous quelles conditions les expressions de λ, μ, ν, ϱ, données par le premier système, sont entières. Il est facile de voir que cela exige que les produits $\omega\varphi$, $\omega\psi$, ω désignant toujours le plus grand diviseur commun de a, $2b$, c, soient des entiers. En effet, comme des équations précédentes on conclut facilement

$$\nu=\frac{a}{\omega}\omega\psi,\quad \varrho-\lambda=\frac{2b}{\omega}\omega\psi,\quad -\mu=\frac{c}{\omega}\omega\psi,$$

on voit que, si le produit $\omega\psi$, réduit à sa plus simple expression, avait un dénominateur autre que l'unité, ce dénominateur serait diviseur commun des entiers $\frac{a}{\omega}$, $\frac{2b}{\omega}$, $\frac{c}{\omega}$, qui n'admettent pas de pareil diviseur. La conclusion obtenue pour $\omega\psi$, s'étend sur le champ à $\omega\varphi$, au moyen de l'équation $\omega\varphi=\omega\lambda+b\omega\psi$. Mais la réciproque a également lieu, et il est facile de s'assurer que, si l'on fait usage de valeurs de φ et ψ, telles que $\varphi=\frac{t}{\omega}$, $\psi=\frac{u}{\omega}$, où t et u sont des entiers, et satisfaisant à l'équation (5), il en résultera des valeurs entières pour λ, μ, ν, ϱ. Pour le voir, substituons ces expressions dans les équations obtenues plus haut; il viendra ainsi

$$(6)\qquad t^2-Du^2=\omega^2,$$

$$(7)\qquad \lambda=\frac{t-bu}{\omega},\quad \mu=-\frac{cu}{\omega},\quad \nu=\frac{au}{\omega},\quad \varrho=\frac{t+bu}{\omega}.$$

Relativement à μ et ν il n'y a rien à prouver, a et c étant divisibles par ω. Quant à λ et ϱ, comme leur différence $\varrho-\lambda=\frac{2bu}{\omega}$, est évidemment un entier, tout revient à faire voir que l'une des expressions $\frac{t+bu}{\omega}$, $\frac{t-bu}{\omega}$, est pareillement un entier. Mais de l'équation à laquelle t et u sont supposés satisfaire, mise sous la forme $\frac{(t+bu)(t-bu)}{\omega^2}=1-\frac{ac}{\omega^2}u^2$, on conclut que le produit des deux facteurs $t+bu$ et $t-bu$ est un multiple de ω^2, d'où et de ce que ω ne renferme pas plusieurs nombres premiers différents, il suit que l'un au moins des deux facteurs est divisible par ω, ce qu'il s'agissait de faire voir. Les formules (7), en y substituant successivement toutes les solutions entières de l'équation (6), donneront donc toutes les

transformations $\binom{\lambda, \mu}{\varrho, \nu}$ de la forme (a, b, c) en elle-même, et il est d'ailleurs évident que chacune de ces transformations ne se présentera qu'une seule fois, car on voit par les deux premières des formules en question, qu'à des valeurs déterminées λ et μ répondent toujours des valeurs également déterminées pour t et u.

Remarque. L'analyse qui vient de nous conduire de la manière la plus simple à la solution de la question proposée, a en outre l'avantage de montrer clairement ce qui distingue les transformations propres, les seules que nous ayons à considérer, de celles qu'on appelle impropres. On voit en effet que, s'il s'agit des transformations d'une forme en elle-même, les premières sont celles pour lesquelles les deux expressions linéaires dont la forme donnée peut être considérée comme le produit, restent l'une et l'autre invariables, abstraction faite des facteurs constants qu'elles acquièrent; tandis que les transformations impropres qui n'existent toutefois que pour des formes d'une nature particulière et répondent alors au second des deux systèmes d'équations obtenus plus haut, ont pour effet d'échanger entre elles les deux expressions linéaires dont il s'agit. La même remarque s'étend aux substitutions qui ne reproduisent pas la forme donnée, et la changent au contraire en une autre équivalente mais distincte. En combinant ce qui précède avec le résultat du n° précédent, il est facile de s'assurer que, si après avoir décomposé en facteurs linéaires la forme primitive et celle qui en dérive, on considère comme correspondants ceux de leurs facteurs, qui contiennent le radical $\sqrt{D}$ avec le même signe, toute transformation de la première dans la seconde, sera propre ou impropre, suivant que les facteurs linéaires se changent en leurs correspondants ou non.

III. Si maintenant nous substituons les expressions (7) dans les équations (4), ces dernières prendront la forme:

$$\alpha' = \frac{\alpha t - (b\alpha + c\gamma)u}{\omega}, \qquad \beta' = \frac{\beta t - (b\beta + c\delta)u}{\omega},$$

$$\gamma' = \frac{\gamma t + (a\alpha + b\gamma)u}{\omega}, \qquad \delta' = \frac{\delta t + (a\beta + b\delta)u}{\omega}.$$

Au moyen de ces équations, on pourra donc, une première transformation $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ d'une forme (a, b, c) en une autre (a', b', c') équivalente étant donnée, en déduire toutes les transformations possibles, en supposant d'ailleurs que la solution complète de l'équation (6) soit également connue.

§. 12.

Lorsque la forme

$$(1)\qquad ax^2+2bxy+cy^2,$$

dont nous désignerons le déterminant par D, et dont nous considérerons d'abord les coëfficients a, b, c, comme susceptibles d'un diviseur commun quelconque, obtient une valeur déterminée m, en y attribuant des valeurs particulières r et s aux indéterminées x et y, nous dirons que l'entier m est *représenté* par la forme donnée. Nous supposerons toujours, si nous n'avertissons expressément du contraire, que les entiers déterminés r et s sont premiers entre eux. Sous cette restriction, m diffère toujours de zéro, car il est facile de voir que l'hypothèse de $m=0$, suppose $r=0$, $s=0$, valeurs dont un nombre quelconque est diviseur commun. Il s'agit maintenant de déduire les conséquences qui résultent d'une représentation telle que nous venons de la définir. On voit tout d'abord que, si l'on choisit deux entiers ϱ et σ qui satisfassent à l'équation

$$(2)\qquad r\sigma-s\varrho=1,$$

évidemment résoluble, et que l'on applique ensuite la substitution $\begin{pmatrix} r, & \varrho \\ s, & \sigma \end{pmatrix}$ à la forme (1), celle-ci se changera en cette autre équivalente

$$(3)\qquad \left(m,\, n,\, \frac{n^2-D}{m}\right),$$

où

$$(4)\quad m=ar^2+2brs+cs^2,\qquad (5)\quad n=ar\varrho+b(r\sigma+s\varrho)+cs\sigma.$$

Le troisième coëfficient de la forme (3) étant entier, on conclut que n satisfait à la congruence

$$(6)\qquad n^2\equiv D\ (\text{mod.}\ m).$$

On voit donc qu'une condition nécessaire, quoique nullement suffisante, pour que m puisse être représenté par la forme (1), consiste en ce que D doit être résidu quadratique relativement au module m, et que d'une représentation supposée connue, on peut toujours déduire une racine n de la congruence (6), en substituant une solution quelconque de l'équation (2) dans la formule (5). Comme l'équation (2) admet toujours une infinité de solutions, il est naturel de rechercher comment n varie, lorsqu'on passe d'une de ces solutions à une autre. Pour y parvenir, soit ϱ_0, σ_0 une solution particulière et soit n_0 la valeur correspondante de n; si maintenant l'on introduit la solution générale $\varrho=\varrho_0+r\xi$, $\sigma=\sigma_0+s\xi$, où ξ désigne un

entier complexe arbitraire, dans la formule (5), on aura pour la valeur générale de n,

$$n = n_0 + m\xi,$$

d'où l'on conclut que les valeurs en nombre infini, dont n est susceptible, étant toutes congrues entre elles suivant le module m, forment une racine unique de la congruence (6), et l'on doit ajouter que l'arbitraire ξ peut toujours être choisie de manière à faire coïncider n avec l'une quelconque des valeurs en nombre infini, que l'on peut considérer comme autant d'expressions différentes d'une même racine de la congruence en question.

Cela étant, nous dirons désormais d'une manière abrégée, que la représentation de l'entier m par la forme (1), pour laquelle on a $x = r$, $y = s$, *appartient à la valeur n de l'expression* $\sqrt{D}$ (mod. m), que l'on déduit de l'équation (5), en y substituant deux quelconques des entiers ϱ et σ qui satisfont à l'équation (2).

La conclusion que nous venons d'obtenir et qui consiste en ce que la représentation $x = r$, $y = s$, appartenant à la valeur n de $\sqrt{D}$ (mod. m), a toujours pour conséquence l'équivalence des formes (1) et (3), a également lieu en sens inverse. En effet si, supposant l'équivalence de ces dernières, nous désignons par $\binom{r,\ \varrho}{s,\ \sigma}$ l'une quelconque des substitutions par lesquelles la première se change dans la seconde, nous aurons évidemment les équations (2), (4) et (5), dont la seconde fournit une représentation qui en vertu des deux autres appartient évidemment à la valeur n de $\sqrt{D}$ (mod. m). Je dis de plus qu'il n'y aucune représentation satisfaisant à la condition exigée, qui ne puisse s'obtenir ainsi au moyen d'une transformation de la forme (1) en celle (3), et que chaque représentation se présentera une seule fois, c'est-à-dire qu'elle proviendra toujours d'une transformation unique et déterminée. Pour prouver d'abord le premier point, remarquons qu'en vertu de la définition même de la valeur n à laquelle une représentation est dite appartenir, supposer l'existence d'une telle représentation pour l'entier m, c'est supposer les équations (4), (2) et (5), desquelles il résulte sur le champ que la forme (1), au moyen de la substitution $\binom{r,\ \varrho}{s,\ \sigma}$, se change en une autre du même déterminant D, et dont les deux premiers coëfficients sont m et n. On conclut de là que le troisième coëfficient est $\frac{n^2 - D}{m}$, et que la substitution indiquée est en effet l'une de celles par les-

quelles la forme (1) se change en celle (3). Quant au second point, il est évident que pour l'établir, on n'a qu'à faire voir que les deux équations (2) et (5), en y considérant r et s comme donnés, ne sauraient être satisfaites par plus d'un couple de valeurs de ϱ et de σ. Mais cela est manifeste, puisque les équations dont il s'agit, étant résolues, donnent ces valeurs complètement déterminées

$$\varrho = \frac{(n-b)r-cs}{m}, \qquad \sigma = \frac{ar+(n+b)s}{m}.$$

On voit par ce qui précède, que pour que l'entier m puisse être représenté par la forme (1) de manière à ce que ces représentations appartiennent à une valeur donnée n de l'expression $\sqrt{D}$ (mod. m), il faut et il suffit que les formes (1) et (3) soient équivalentes entre elles. Cette condition supposée remplie, on n'aura plus qu'à chercher toutes les substitutions $\binom{r,\ \varrho}{s,\ \sigma}$ par lesquelles la forme (1) se change en celle (3), et l'on posera $x=r$, $y=s$. Or, les substitutions dont il s'agit ayant été exprimées dans le §. précédent en fonction de l'une quelconque d'entre elles, on en conclut, si nous revenons maintenant à l'hypothèse que les coëfficients de la forme (1) n'ont pas de diviseur commun, que les représentations cherchées sont toutes comprises dans ces deux équations

$$x = \frac{\alpha t-(b\alpha+c\gamma)u}{\omega}, \qquad y = \frac{\gamma t+(a\alpha+b\gamma)u}{\omega},$$

où α, γ sont resp. le premier et le troisième des coëfficients qui entrent dans une substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ arbitrairement choisie parmi celles qui transforment la forme (1) en celle (3), et où t et u satisfont généralement à l'équation $t^2-Du^2=\omega^2$. Il est bon de remarquer que le résultat est maintenant tout-à-fait indépendant de la forme (3) que nous avons eu à considérer pour l'obtenir. En effet, comme $x=\alpha$, $y=\gamma$ est évidemment une représentation particulière comprise dans les formules précédentes et qui s'en déduit en supposant $t=\omega$, $u=0$, on peut l'énoncer en disant que les équations que nous venons d'obtenir, expriment toutes les représentations appartenant à une même valeur de $\sqrt{D}$ (mod. m), en fonction de l'une quelconque d'entre elles.

§. 13.

Les questions que nous avons traitées dans les §§. précédents, s'étant trouvées dépendre de la solution de l'équation indéterminée

$$t^2 - Du^2 = \omega^2,$$

il est temps de nous occuper de cette dernière. Mais pour ne pas donner une étendue démesurée au présent Mémoire, nous considererons exclusivement le cas où $\omega = 1$, cas qui est celui des formes de première espèce; et nous laisserons au lecteur qui voudrait s'exercer sur ces matières, le soin de chercher les modifications assez légères qu'il faudrait apporter aux recherches suivantes pour les rendre applicables aux formes des deux autres espèces.

La théorie de l'équation

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

peut se déduire d'un lemme dont voici l'énoncé:

„a désignant un nombre complexe irrationnel donné, on pourra toujours trouver une infinité d'entiers complexes simultanés x et y, tels „qu'on ait

$$N(x - ay) < \frac{4}{N(y)}."$$

Observons d'abord que, si l'on satisfait a la condition du lemme par le système x, y, on y satisfera aussi par celui-ci $i^e x$, $i^e y$. Comme dans l'application que nous aurons à faire du lemme, il importe de ne pas employer simultanément des systèmes dérivant ainsi l'un de l'autre, nous éviterons cet inconvenient, en ne considérant deux systèmes comme distincts qu'autant que les valeurs de $N(x - ay)$ qui s'y rapportent sont différentes entre elles. Il est en effet évident que pour deux systèmes comme ceux dont il vient d'être question, l'expression $N(x - ay)$ a toujours la même valeur. On voit encore que la condition du lemme se trouve remplie, lorsque, x étant quelconque, on a $y = 0$, mais nous ferons pareillement abstraction de ce cas, de sorte que $x - ay$ aura toujours une valeur irrationnelle et par conséquent différente de zéro.

Pour démontrer notre lemme, commençons par faire voir qu'on peut toujours trouver deux entiers x et y, qui satisfaisant à l'inégalité proposée, soient en outre tels que l'on ait

$$N(x - ay) < A,$$

A désignant une quantité positive arbitrairement choisie. Soit à cet effet

n un entier positif pour lequel on ait, $A > \frac{1}{2n^2}$, et désignons par η l'un quelconque des entiers complexes dont les deux parties, et j'entends par là la partie réelle et le coëfficient de i qui entrent dans une expression complexe quelconque, soient comprises dans la suite

$$-n,\ -(n-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots,\ n-1,\ n.$$

Relativement à chacun des entiers η dont le nombre est évidemment égal à $(2n+1)^2$, déterminons l'entier correspondant ξ tel que les deux parties de l'expression

$$\xi - a\eta,$$

obtiennent des valeurs non-négatives et inférieures à l'unité. Cela supposé, il est evident que, si l'on désigne par

$$p\frac{1}{2n},\quad q\frac{1}{2n},$$

les plus grand multiples de $\frac{1}{2n}$, resp. contenus dans les deux parties dont il s'agit, les entiers réels p et q seront l'un et l'autre compris dans la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1.$$

Or, comme avec de pareils entiers on ne peut former qu'un nombre de combinaisons distinctes, exprimé par $(2n)^2$, tandis que celui des expressions $\xi - a\eta$ est $(2n+1)^2$, on voit que l'une au moins des combinaisons p, q devra se reproduire. Soient donc

$$\xi - a\eta,\qquad \xi' - a\eta',$$

les deux expressions ou deux des expressions pour lesquelles cette circonstance se présente, il est évident qu'en formant la différence de ces expressions, on obtiendra, en posant

$$\xi - \xi' = x,\qquad \eta - \eta' = y$$

une nouvelle expression

$$x - ay,$$

dans laquelle l'entier y sera évidemment différent de zéro, et dont les deux parties seront, abstraction faite du signe, inférieures à $\frac{1}{2n}$, de sorte qu'on aura

$$N(x-ay) < \frac{1}{2n^2},\quad \text{et par suite}\quad N(x-ay) < A,$$

ce qui coïncide avec la seconde des conditions posées plus haut. Pour prouver que l'expression $N(x-ay)$ satisfait aussi à l'autre condition qui

est celle du lemme, observons que, les deux parties de $y = \eta - \eta'$, ayant évidemment des valeurs numériques non-supérieures à $2n$, on a l'inégalité $N(y) \leqq 8n^2$, dont la comparaison avec celle que nous venons d'obtenir, donne

$$N(x-ay) < \frac{4}{N(y)}$$

conformément à l'énoncé.

Ayant ainsi prouvé qu'on peut toujours trouver un couple x, y, qui, en même temps qu'il s'accorde avec la condition de l'énoncé, satisfasse à l'inégalité $N(x-ay) < A$, où A est d'une petitesse arbitraire, il est facile d'en conclure la vérité du lemme. Il suffit pour cela d'observer que, quel que soit le nombre des systèmes qu'on suppose déjà connus, on trouvera un nouveau système distinct des premiers, si, appliquant le procédé que nous venons d'expôser, on y suppose A égal à la plus petite des valeurs que l'expression $N(x-ay)$ présente dans les systèmes antérieurement obtenus.

Remarquons maintenant que relativement à deux quantités complexes quelconques r et s, on a l'inegalité connue et d'ailleurs facile a vérifier,

$$\sqrt{N(r+s)} \leqq \sqrt{N(r)} + \sqrt{N(s)},$$

les radicaux étant supposes pris positivement. Supposant $r = x - ay$, $s = 2ay$, il viendra

$$\sqrt{N(x+ay)} \leqq \sqrt{N(x-ay)} + \sqrt{N(2ay)}$$

inégalité qui au moyen de celle du lemme, mise sous la forme

$$\sqrt{N(x-ay)} < \frac{2}{\sqrt{N(y)}},$$

se change en

$$\sqrt{N(x+ay)} < 2\sqrt{N(ay)} + \frac{2}{\sqrt{N(y)}}.$$

Ces deux dernières étant multipliées entre elles, donnent

$$\sqrt{N(x^2-a^2y^2)} < 4\sqrt{N(a)} + \frac{4}{N(y)}$$

et par suite, y étant un entier complexe différent de zéro de sorte que $N(y) \geqq 1$,

$$\sqrt{N(x^2-a^2y^2)} < 4(\sqrt{N(a)}+1).$$

On voit donc que pour tous les couples d'entiers qui satisfont au lemme et dont le nombre est infini, $N(x^2-a^2y^2)$ reste au dessous d'une limite invariable. Appliquons ce résultat au cas où $a = \sqrt{D}$, D étant un entier complexe non-quarré et le radical désignant une racine déterminée qui restera toujours la même dans ce qui va suivre. Comme dans cette hypo-

thèse. $x^2-a^2y^2=x^2-Dy^2$ est un entier complexe et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers dont la norme soit inférieure a une limite donnée, il faudra nécéssairement que l'expression x^2-Dy^2 obtienne une infinité de fois une même valeur l qui sera évidemment différente de zéro, y n'étant pas nul. L'équation $x^2-Dy^2=l$, etant ainsi satisfaite par un nombre infini de systèmes x, y, on voit encore que parmi ces systèmes il s'en trouvera nécessairement un nombre illimité, pour lesquels les valeurs tant de x que de y presentent des differences multiples de l. Soient

$$x^2-Dy^2=l, \qquad x'^2-Dy'^2=l,$$

deux équations pour lesquelles cela arrive, de sorte qu'on ait simultanément $x\equiv x'$, $y\equiv y'$ (mod. l). Le produit de ces équations étant

$$(xx'-Dyy')^2-D(xy'-yx')^2=l^2,$$

et $xy'-yx'$ étant divisible par l en vertu des conditions supposées, $xx'-Dyy'$ sera aussi un multiple de l, de sorte qu en divisant par l^2, on aura

$$t^2-Du^2=1,$$

les entiers t et u étant donnés par les formules

$$t=\frac{xx'-Dyy'}{l}, \qquad u=\frac{xy'-yx'}{l}.$$

Nous ajouterons qu'il ne saurait arriver qu'on eût $u=0$, car il est facile de se convaincre que cela supposerait $x'=\pm x$, $y'=\pm y$, de sorte que les systèmes x, y et x', y' ne seraient pas distincts.

Etant ainsi assuré que l'équation $t^2-Du^2=1$, est toujours résoluble sans qu'on suppose $u=0$, on parviendra nécessairement à une solution si l'on attribue successivement à u toutes les valeurs entières dont les normes forment la suite croissante des entiers positifs susceptibles d'être décomposés en deux quarrés, jusqu'à ce que l'on tombe sur une valeur de u pour laquelle Du^2+1 soit égal à un quarré. Cette simple possibilité suffit pour notre objet. Il existe un algorithme assez expéditif et analogue a celui des fractions connues, au moyen duquel on peut obtenir toutes les solutions de l'équation proposée ou plutôt celle de ces solutions, que l'on doit considerer comme fondamentale et dont les autres se déduisent facilement: mais comme l'exposition de cet algorithme exigerait de longs détails qui ne sont nullement nécessaires pour le but que nous avons en vue, nous ne nous en occuperons pas ici.

§. 14.

La possibilité de l'équation

$$(1)\quad t^2 - Du^2 = 1,$$

ayant été établie dans le §. precédent, il s'agira maintenant de découvrir le lien qui existe entre ces solutions en nombre infini. C'est a quoi nous parviendrons par les considérations suivantes.

I. Observons d'abord que la double solution évidente $t = \pm 1$, $u = 0$, est la seule pour laquelle l'une des indéterminées soit égale à zéro. Car il est manifeste que l'hypothèse $t = 0$, est inadmissible, D n'étant pas un quarre. Pour cette solution on a $N(t + u\sqrt{D}) = 1$, et je dis de plus qu'elle est la seule pour laquelle cette équation ait lieu. En effet, comme les expressions $N(t + u\sqrt{D})$, $N(t - u\sqrt{D})$ ont toujours des valeurs réciproques l'une de l'autre, puisque l'on a $N(t + u\sqrt{D})\,N(t - u\sqrt{D}) = N(t^2 - Du^2) = 1$, la condition précédente est équivalente à celle-ci

$$N(t + u\sqrt{D}) + N(t - u\sqrt{D}) = 2.$$

Si maintenant l'on remarque que, r et s étant des quantités complexes quelconques, on a identiquement

$$N(r + s) + N(r - s) = 2N(r) + 2N(s)$$

cette dernière pourra prendre la forme

$$N(t) + N(u)\,N(\sqrt{D}) = 1.$$

Or, $N(\sqrt{D})$ étant une quantité égale ou supérieure à l'unité, cette équation exige évidemment que l'on ait $u = 0$, ou $t = 0$, lorsque $N(D) = 1$; mais la dernière hypothèse ne pouvant avoir lieu, l'assertion avancée se trouve justifiée.

II. Je dis en second lieu que, si pour deux solutions t, u, et t', u', on a $N(t' + u'\sqrt{D}) = N(t + u\sqrt{D})$, ces deux solutions sont ou identiques ou opposées, de sorte que $t' = \pm t$; $u' = \pm u$, les signes se correspondant. En effet il est clair que de deux solutions quelconques t. u, et t', u', on peut en déduire une troisième au moyen de l'équation

$$\frac{t' + u'\sqrt{D}}{t + u\sqrt{D}} = \tau + \upsilon\sqrt{D},$$

dans laquelle il faut égaler séparément les parties rationnelles et les coëfficients de $\sqrt{D}$, ce qui donne

$$\tau = tt' - Duu', \qquad \upsilon = tu' - ut'.$$

Comme relativement à cette nouvelle solution on a

$$N(\tau+\upsilon\sqrt{D}) = \frac{N(t'+u'\sqrt{D})}{N(t+u\sqrt{D})} = 1,$$

et par suite $\tau=\pm 1$, $\upsilon=0$, on conclut $t'=\pm t$, $u'=\pm u$, ce qu'il s'agissait de prouver.

III Si l'on excepte la double solution $t=\pm 1$, $u=0$, les solutions de l'équation (1) existent toujours par groupes de quatre, les indéterminées pouvant être prises avec un signe arbitraire. Il est évident que relativement à un pareil groupe, l'expression $t+u\sqrt{D}$ a quatre valeurs distinctes exprimées par $\pm\chi$, $\pm\frac{1}{\chi}$, χ désignant l'une quelconque d'entre elles, tandis que l'expression $N(t+u\sqrt{D})$ ne présente que ces deux valeurs distinctes $N(\chi)$, $N\left(\frac{1}{\chi}\right)$, réciproques l'une de l'autre. L'expression $N(t+u\sqrt{D})$ n'ayant qu'une valeur unique supérieure à l'unité pour chaque groupe, cette valeur pourra servir à caractériser ce groupe et à le distinguer de tous les autres, comme cela résulte du n° précédent où l'on a vu que la supposition $N(t+u\sqrt{D}) = N(t'+u'\sqrt{D})$, ne peut avoir lieu que pour des solutions identiques ou opposées, c'est-à-dire appartenant au même groupe. Cela posé, nous appellerons groupe fondamental celui pour lequel la valeur de $N(t+u\sqrt{D})$, toujours supposée supérieure à l'unité, est moindre que la valeur analogue relative à tout autre groupe. Si maintenant l'on remarque que, la variable positive ϱ étant supposée croître à partir de $\varrho=1$, la fonction $\varrho+\frac{1}{\varrho}$ croîtra également à partir de la valeur 2, on voit que la définition précédente revient à dire que le groupe fondamental est celui pour lequel l'expression

$$\begin{aligned} N(t+u\sqrt{D}) + \frac{1}{N(t+u\sqrt{D})} &= N(t+u\sqrt{D}) + N(t-u\sqrt{D}) \\ &= 2N(t) + 2N(u)\,N(\sqrt{D}) \end{aligned}$$

a la plus petite valeur supérieure à 2. Sous cette forme, la définition, quoique la même au fond, a l'avantage d'être indépendante de la supposition $N(t+u\sqrt{D})>1$, l'expression précédente ayant évidemment la même valeur pour chacune des quatre solutions formant un même groupe. Il est actuellement facile d'indiquer une méthode propre à faire découvrir le groupe fondamental, en supposant toujours qu'il s'agisse de simples possibilités et nullement d'une opération facile sous le rapport du calcul pratique. Ayant

trouvé une première solution t, u, et détermine la valeur correspondante de $N(t+u\sqrt{D})$, désignée par b, tout revient à voir quels sont parmi les couples d'entiers t et u, tels qu'on ait

$$1 < N(t) + N(u)\,N(\sqrt{D}) \leqq \tfrac{1}{2}\left(b + \tfrac{1}{b}\right),$$

et qui sont évidemment en nombre fini, ceux qui satisfaisant à l'équation (1), donneut la plus petite valeur à l'expression qui vient d'être écrite. Les quatre couples qui remplissent ces conditions, coïncident avec les quatre solutions du groupe cherche.

Il nous reste à faire voir comment de l'une des solutions de ce groupe l'on peut deduire toutes ies solutions de la proposée. Quoique cela puisse se faire au moyen de l une quelconque d'entre elles, nous conviendrons, pour éviter des distinctions tout-à-fait inutiles, de nous servir constamment de l'une des deux solutions opposees pour lesquelles on a $N(t+u\sqrt{D}) > 1$. Nous désignerons par T U, celle des solutions fondamentales que nous emploierons et nous poserons $N(T+U\sqrt{D}) = \sigma$, la quantité $\sigma > 1$ devant se presenter souvent dans ce qui suivra.

IV. Cela pose, je dis que toutes les solutions de l'équation (1) sont données par la formule

$$(2) \qquad t+u\sqrt{D} = \pm(T+U\sqrt{D})^n,$$

où il faut employer successivement chacun des deux signes et attribuer à l'exposant n toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à ∞, et de plus, que chaque solution est contenue d'une seule manière dans cette équation, c'est-à-dire qu'elle répond toujours à un signe et à un exposant déterminés. Il est sans doute inutile d'ajouter que pour faire usage de la formule (2), il faut égaler séparément les partias rationnelles et les coëfficients de $\sqrt{D}$, aprés avoir développé le second membre, mis préalablement sous la forme $\pm(T-U\sqrt{D})^{-n}$, lorsque n est négatif.

1°. Il est d'abord facile de prouver que les entiers t, u donnés par la formule (2), satisfont en effet à l'équation (1). Il suffit pour cela de remarquer que l'équation (2) subsiste également lorsqu'on y remplace $\sqrt{D}$ par $-\sqrt{D}$, et que l'équation ainsi modifiée, étant multipliée par l'équation primitive, donne précisément l'équation (1).

2°. Pour faire voir en second lieu qu'il n'y a aucune solution de l'équation qui ne soit comprise dans la formule (2), posons pour un instant, $t_n + u_n\sqrt{D} = (T+U\sqrt{D})^n$. L'équation (2) est alors équivalente à

ces deux équations simultanées, $t = \pm t_n$, $u = \pm u_n$, les signes étant arbitraires, mais égaux dans les deux équations. Observons maintenant que, comme la puissance $(N(T+U\sqrt{D}))^n = \sigma^n$ croît constamment depuis la valeur zéro jusqu'à une valeur infinie, lorsque l'exposant n croît lui-même depuis $-\infty$ jusqu'à ∞, il faut nécessairement que relativement à une solution donnée τ, υ quelconque, on ait

$$N(\tau+\upsilon\sqrt{D}) = \sigma^n, \quad \text{ou} \quad \sigma^n < N(\tau+\upsilon\sqrt{D}) < \sigma^{n+1},$$

l'exposant n ayant une valeur unique et déterminée. Dans le premier cas où l'on a $N(\tau+\upsilon\sqrt{D}) = N(t_n+u_n\sqrt{D})$, on conclura en vertu du n° II, $\tau = \pm t_n$, $\upsilon = \pm u_n$, où le signe qui doit être le même pour les deux équations, est complètement déterminé, l'entier donné τ ne pouvant se réduire à zéro. On voit donc que pour ce premier cas, la solution donnée τ, υ est comprise dans l'équation (2) et répond à un exposant et à un signe entièrement déterminés. Reste à considérer la seconde hypothèse; la double inégalité qui s'y rapporte, étant divisée par σ^n, se change en celle-ci

$$1 < \frac{N(\tau+\upsilon\sqrt{D})}{N(t_n+u_n\sqrt{D})} < N(T+U\sqrt{D}),$$

en vertu de laquelle la nouvelle solution τ', υ' donnée par la formule $\tau'+\upsilon'\sqrt{D} = \frac{\tau+\upsilon\sqrt{D}}{t_n+u_n\sqrt{D}}$, satisferait à la condition $1 < N(\tau'+\upsilon'\sqrt{D}) < N(T+U\sqrt{D})$, ce qui est impossible, cette dernière inégalité étant en contradiction avec la définition du groupe fondamental. Le second cas ne pouvant avoir lieu, la proposition se trouvée établie.

V. L'équation (1) présente deux cas particuliers qui méritent une mention spéciale comme devant donner lieu plus tard à une application très-remarquable; ces cas sont ceux où D est un entier réel ou le produit d'un tel entier par i. Comme dans la théorie des nombres complexes, l'équation (1) ne diffère pas essentiellement de celle où D est remplacé par la valeur opposée, nous pouvons toujours considérer comme positif l'entier réel dont il vient d'être question.

1°. Considérons en premier lieu le cas où D est réel et positif et supposons le radical $\sqrt{D}$ également positif. Il est évident que, si dans le cas dont il s'agit on satisfait à l'équation (1) par les valeurs, $t = \alpha+\beta i$, $u = \gamma+\delta i$, on y satisfera aussi par celles-ci, $t = \alpha-\beta i$, $u = \gamma-\delta i$. Or, ces deux solutions donnant évidemment la même valeur pour l'expression $N(t+u\sqrt{D})$, elles sont nécessairement identiques ou opposées, de

sorte qu'on aura

$$\alpha-\beta i = \pm(\alpha+\beta i), \quad \gamma-\delta i = \pm(\gamma+\delta i)$$

et par suite ou $\beta=0$, $\delta=0$; ou $\alpha=0$, $\gamma=0$. On voit donc que t et u sont ou l'un et l'autre des entiers réels ou l'un et l'autre de tels entiers affectés du facteur i. Il résulte de là, et en ayant égard à la formule (2), que, si la solution fondamentale se trouve dans le premier cas, l'équation (1) n'a que des solutions réelles, tandis que pour une solution fondamentale imaginaire, les solutions de l'équation (1) sont en partie réelles, en partie imaginaires, les premières répondant à des valeurs paires et les dernières à des valeurs impaires de l'exposant; et si l'on observe que toute solution imaginaire de l'équation (1) donne sur le champ une solution réelle de celle-ci $t^2-Du^2=-1$, et réciproquement, on peut dire que la solution fondamentale présentera le second ou le premier des deux cas indiqués, suivant que l'équation $t^2-Du^2 = -1$, admet des solutions réelles ou non. Remarquons encore qu'en vertu de la condition $N(T+U\sqrt{D})>1$ à laquelle la solution fondamentale est toujours supposée satisfaire, il est évident que dans le premier cas T et U, et dans le second T_1, U_1 (en supposant $T=T_1 i$, $U=U_1 i$) sont toujours de même signe, de sorte que nous pourrons toujours considérer ces entiers comme positifs, l'inégalité précédente laissant le choix entre deux solutions fondamentales opposées. Cela posé, on voit que, si dans le premier cas on n'a en vue que les solutions positives de l'équation (1), il faudra dans la formule (2) adopter le signe supérieur et n'attribuer à n que des valeurs pareillement positives. La formule (2) ainsi restreinte donne évidemment des valeurs d'autant plus grandes pour le binome $t+u\sqrt{D}$, et par suite pour chacun des entiers t et u, qui en vertu de l'équation (1) croissent toujours simultanément; que l'exposant n est lui-même plus grand, d'où il suit que les deux termes de la solution fondamentale T, U sont les plus petits entiers positifs qui résolvent l'équation (1). Il serait également facile de faire voir que dans le second cas, T_1, U_1 sont les plus petits entiers positifs qui satisfont à l'équation $t^2-Du^2=-1$, mais il sera plus commode pour notre objet de n'employer que l'équation (1). Observons donc que pour obtenir toutes les solutions positives de cette dernière, il faudra après avoir posé dans la formule (2) $T=T_1 i$, $U=U_1 i$, remplacer n par $2n$ et supprimer ensuite la facteur $\pm(-1)^n$. On obtient ainsi $t+u\sqrt{D} = (T_1+U_1\sqrt{D})^{2n}$, et l'on voit alors que la plus petite solution positive de l'équation (1) est donnée par la formule $t+u\sqrt{D}=(T_1+U_1\sqrt{D})^2$.

En désignant donc généralement par τ, υ les plus petits entiers positifs qui résolvent l'équation (1), on aura suivant les deux cas

$$\tau+\upsilon\sqrt{D}=T+U\sqrt{D}, \quad \tau+\upsilon\sqrt{D}=\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{i}\right)^2.$$

Ces deux formules peuvent être réunies dans cette formule unique, dans laquelle $\varkappa$ désigne le nombre 1 ou le nombre 2, suivant que l'équation $t^2-Du^2=-1$, admet des solutions réelles eu n'en admet pas.

$$(3) \quad \sigma=N(T+U\sqrt{D})=(\tau+\upsilon\sqrt{D})^\varkappa.$$

2°. Pour traiter l'autre cas, soit $D=D'i$, D' étant positif. Il est facile de voir que, si l'on satisfait alors à l'équation (1), en posant $t=\alpha+\beta i$, $u=\gamma+\delta i$, on y satisfera pareillement en posant $t=\alpha-\beta i$, $u=\delta+\gamma i$. Or, ces deux solutions donnant évidemment la même valeur pour l'expression $N(t)+N(u)N(\sqrt{D})$ qui, d'après ce qu'on a vu plus haut, peut servir à caractériser les différents groupes de solutions, on voit que les solutions précédentes appartiennent au même groupe. On a donc $\delta+\gamma i=\pm(\gamma+\delta i)$ et par conséquent $\delta=\pm\gamma$. Comme en vertu de ce résultat u est toujours divisible par $1-i$, si nous posons dans l'équation (1), $u=(1-i)u'$, $t=t'$, elle prendra la forme $t'^2-2D'u'^2=1$, et nous retombons sur le cas déjà traité. Il est facile de conclure de là que l'expression $\sigma=N(T+U\sqrt{D})$, toujours supposée supérieure à l'unité, est pour le cas dont nous nous occupons, donnée par l'équation

$$(4) \quad \sigma=N(T+U\sqrt{D})=(\tau+\upsilon\sqrt{2D'})^\varkappa,$$

τ et υ désignant les plus petits entiers positifs qui résolvent l'équation $t'^2-2D'u'^2=1$, et $\varkappa$ ayant la valeur 1 ou la valeur 2, suivant que l'équation $t'^2-2D'u'^2=-1$, admet des solutions réelles ou non.

§. 15.

La théorie de l'équation $t^2-Du^2=1$, étant maintenant connue, nous pouvons reprendre les questions déjà traitées plus haut et en achever la solution, en nous bornant, comme nous en avons déjà averti, à considérer des formes quadratiques qui appartiennent à la première espèce.

I. Nous nous occuperons en premier lieu de celle de ces questions, qui concerne les représentations d'un entier donné m par une forme (a, b, c) également donnée. Supposons que m soit susceptible d'être représenté par la forme dont il s'agit, et soient $x=\alpha$, $y=\gamma$, des valeurs parti-

culières et premières entre elles, telles que la valeur correspondante de la forme soit égale à m. Cela posé, il résulte du §. 12, que toutes les représentations appartenant à la même valeur de l'expression $\sqrt{D}$ (mod. m), à laquelle appartient la représentation particuliere dont il s'agit, sont données par ces deux équations:

$$x = \alpha t - (b\alpha + c\gamma)u,\quad y = \gamma t + (a\alpha + b\gamma)u,$$

où il faut substituer toutes les solutions de l'équation $t^2 - Du^2 = 1$. Les équations précédentes, étant resp. multipliées par a et $b + \sqrt{D}$, et ensuite ajoutées, donnent ce résultat très-simple

$$ax + (b + \sqrt{D})y = (a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma)(t + u\sqrt{D}),$$

qui au moyen de l'équation (2) du §. 14. se change en

$$ax + (b + \sqrt{D})y = \pm(a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma)(T + U\sqrt{D})^n.$$

Soit pour abréger, $N(a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma) = A$, et comme dans le §. cité, $N(T + U\sqrt{D}) = \sigma > 1$. Cela posé, si l'on prend les normes des deux membres de l'équation précédente, on en conclura:

$$N(ax + (b + \sqrt{D})y) = A\sigma^n,$$

où il importe de remarquer que chaque valeur de $N(ax + (b + \sqrt{D})y)$, donnée par cette dernière équation, se présentera deux fois dans la totalité des représentations que nous considérons et que pour abréger, nous nommerons désormais un *groupe* de représentations, comme cela résulte évidemment du double signe contenu dans l'équation précédente, et que le passage des nombres à leurs normes a fait disparaître. Observons encore que, si k désigne une constante positive arbitrairement choisie, l'entier réel n qui doit croître depuis $-\infty$ jusqu'à ∞, obtiendra évidemment une valeur et n'en obtiendra qu'une seule qui satisfasse à la double condition

$$k < A\sigma^n \leqq k\sigma.$$

On conclut de là que dans tout groupe de représentations, ou en d'autres termes, que parmi toutes les représentations qui appartiennent à une même valeur de l'expression $\sqrt{D}$ (mod. m), il en existe toujours deux et qu'il n'en existe que deux pour lesquelles on ait

$$k < N(ax + (b + \sqrt{D})y) \leqq k\sigma;$$

et il est d'ailleurs manifeste qui les deux représentations particulières dont il s'agit et qui varient avec la constante k, sont toujours telles que, l'une étant exprimée par les formules: $x = r$, $y = s$, l'autre le sera par celles-

ci: $x = -r$, $y = -s$. Le résultat que nous venons d'obtenir, va nous fournir un moyen très-simple de décider 1° si un entier donné m peut être représenté par une forme également donnée (a, b, c), ou non, et 2° d'assigner dans le premier de ces deux cas, toutes les représentations dont m est susceptible au moyen de la forme dont il s'agit. On voit d'abord que la question proposée revient à examiner si l'on peut satisfaire à ces deux conditions simultanées

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = m,$$
$$(2) \quad k < N(ax + (b + \sqrt{D})y) \leqq k\sigma,$$

par des entiers x et y premiers entre eux. Si cela n'est pas possible, on sera assuré que m n'est pas susceptible d'être représenté par la forme donnée. Dans le cas contraire, on trouvera une ou plusieurs doubles représentations telles que $x = \pm r$, $y = \pm s$; $x = \pm r'$, $y = \pm s'$; etc., qui appartiendront à autant de groupes distincts, et l'on obtiendra toutes les représentations cherchées, si dans les deux équations rappelées au commencement de ce §., on pose successivement $\alpha = r$, $\gamma = s$; $\alpha = r'$, $\gamma = s'$; etc.

Réduite à ce point, la question ne présente plus aucune difficulté, car il est facile de se convaincre, que, pour que les entiers x et y puissent satisfaire aux conditions simultanées (1) et (2), leurs normes doivent être comprises entre certaines limites faciles à assigner, de sorte que l'examen qu'il s'agit de faire, ne doit porter que sur un nombre limité de combinaisons x, y. En effet, si après avoir multiplié par a l'équation (1), on prend les normes de ses deux membres, il viendra

$$N(ax + (b + \sqrt{D})y)\, N(ax + (b - \sqrt{D})y) = N(am).$$

Cette équation étant comparée avec la double inégalité (2), on en conclura celle-ci

$$\frac{N(am)}{k\sigma} \leqq N(ax + (b - \sqrt{D})y) < \frac{N(am)}{k},$$

et par suite en ajoutant cette dernière et l'inégalité (2),

$$k + \frac{N(am)}{k\sigma} < 2N(ax + by) + 2N(\sqrt{D})\, N(y) < k\sigma + \frac{N(am)}{k}.$$

Il est facile de voir que les entiers x et y, et à plus forte raison les entiers x et y, premiers entre eux qui satisfont à cette double inégalité qui est une conséquence nécessaire des deux conditions (1) et (2), ne présentent qu'un nombre limité de combinaisons faciles a former, et l'on pourra donc toujours décider

si parmi ces entiers simultanés il en existe qui remplissent les deux conditions dont il s'agit, ce que nous nous étions proposé de faire voir.

La condition (2) qui, étant jointe à l'équation (1), a pour effet de réduire chaque groupe de représentations de l'entier m par la forme (a, b, c), à deux représentations particulières qu'elle sépare ainsi de toutes les autres, prend une forme remarquable lorsqu'on fait un choix convenable de la constante arbitraire k qu'elle contient. Soit $k = N(\sqrt{am})$. La condition dont nous parlons, deviendra ainsi

$$N(\sqrt{am}) < N(ax + (b + \sqrt{D})y) \leqq \sigma N(\sqrt{am}).$$

Observons que, comme il ne s'agit que de quantités positives, cette double inégalité est tout-à-fait équivalente à celle-ci,

$$N(am) < (N(ax + (b + \sqrt{D})y))^2 \leqq \sigma^2 N(am).$$

qui à son tour peut être remplacée par celle qu'on en déduit en divisant par $N(ax + (b + \sqrt{D})y)$, et en observant qu'on a

$$N(am) = N(ax + (b + \sqrt{D})y)\, N(ax + (b - \sqrt{D})y).$$

On trouve ainsi

$$(3)\quad N(ax + (b - \sqrt{D})y) < N(ax + (b + \sqrt{D})y) \leqq \sigma^2 N(ax + (b - \sqrt{D})y).$$

C'est sous cette dernière forme que nous emploierons dorénavant la condition qui sert à réduire tout groupe de représentations à deux de ces termes.

11. Quant aux deux questions que nous nous étions proposées sur l'équivalence des formes, comme celle d'entre elles, qui a pour objet de déduire toutes les transformations d'une forme en une autre équivalente, d'une première transformation supposée donnée, s'est trouvée dépendre de l'équation $t^2 - Du^2 = 1$, dont nous avons donné la solution générale, nous n'avons plus à traiter que la première des questions énoncées au commencement du §. 11. Il s'agit donc de faire voir comment, étant données deux formes (a, b, c) et (a', b', c'), ayant un déterminant commun D, on peut décider si ces formes sont équivalentes ou non, et obtenir dans le premier de ces deux cas, l'une des substitutions au moyen desquelles la première se change dans la seconde. Pour résoudre cette question, on se rappellera que, d'après ce qu'on a démontré dans le §. 12, tout revient à voir s'il existe des représentations de l'entier a' par la forme (a, b, c), qui appartiennent à la valeur b' de l'expression $\sqrt{D}$ (mod. a'). Si l'on trouve qu'il n'y a aucune représentation pour laquelle la condition énoncée soit

satisfaite, on sera assuré que les deux formes ne sont pas équivalentes; dans le cas contraire; l'une quelconque des représentations obtenues donnera sur le champ la transformation cherchée. La question proposée se trouvant ainsi réduite à celle dont nous avons donné la solution dans le n° précédent de ce §., doit elle-même être considérée comme résolue.

III. Avant d'en venir à la question qui forme le principal sujet de ce Mémoire, nous avons encore a indiquer, comment, étant donnée une forme $ax^2+2bxy+cy^2$ du déterminant D, on peut assigner d'une manière générale les valeurs simultanées x et y, pour lesquelles la valeur de l'expression précédente soit impaire et première à D, ou plus simplement, soit première à $(1+i)D=\varDelta$. Comme, en posant $x\equiv\alpha$, $y\equiv\gamma$, (mod. $\varDelta$), où α et γ peuvent être choisis dans un système de résidus relatif au module $\varDelta$, l'on a

$$ax^2+2bxy+cy^2\equiv a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2 \text{ (mod. } \varDelta),$$

on voit que la question proposée se réduit à examiner pour lesquelles des combinaisons α, γ, ou plutôt pour combien de ces combinaisons, car c'est uniquement leur nombre qu'il nous importe de connaître, le second membre est premier à $\varDelta$. J'observe maintenant que sans nuire en rien à la généralité de la question, il est permis de considérer le coëfficient a comme premier à $\varDelta$. En effet, comme la forme donnée est supposée de première espèce, on peut toujours, si elle ne satisfait pas à la condition énoncée, la transformer en une autre où cette dernière se trouve remplie; et l'on prouve facilement que relativement à la nouvelle forme, le nombre des combinaisons dont il s'agit, est le même que pour la forme donnée. Le raisonnement par lequel cette dernière assertion peut être justifiée, étant très-simple et d'ailleurs entièrement semblable à celui dont nous avons déjà fait usage dans la question analogue, relative aux entiers réels, nous nous dispenserons de le répéter ici. (B. s. d. a. etc. §. 5.)

Cela posé, il est évident que, pour que l'expression $a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2$ soit première à $\varDelta=(1+i)D$, il faut et il suffit qu'il en soit de même du produit

$$a(a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2)=(a\alpha+b\gamma)^2-D\gamma^2.$$

Distinguons maintenant le cas où D est impair et celui où D est divisible par $1+i$ Dans le premier de ces deux cas, il faudra, si γ est divisible par $1+i$, que $a\alpha+b\gamma$ soit premier à $\varDelta$, et, si γ est impair, que $a\alpha+b\gamma$ soit divisible par $1+i$ et premier à D. Or, comme, γ ayant une valeur

déterminée l'expression $a\alpha + b\gamma$, dans laquelle α est le terme général d'un système de résidus pour le module Δ, représente elle-même un semblable système (§. 5, III.), il s'agira de déterminer combien dans un système de résidus pour le module Δ, il existe de termes premiers à Δ ou de termes premiers à D et en outre divisibles par $1+i$, selon que γ sera ou ne sera pas divisible par $1+i$. Le premier de ces deux nombres est $\psi(\Delta)$; pour obtenir le second, on se rappellera que, si l'on divise par $1+i$, ceux des termes du système en question, qui renferment le facteur $1+i$. les quotients formeront un système de résidus pour le module D (§. 5, II.), d'où l'on conclut que le nombre que nous avons à déterminer, est exprimé par $\psi(D)$. J'ajoute que cette dernière expression peut être remplacée par $\psi(\Delta)$, puisque, D et $1+i$ étant premiers entre eux, on a (§. 5, V.), $\psi(\Delta) = \psi((1+i)D) = \psi(1+i)\psi(D) = \psi(D)$. Ayant ainsi reconnu qu'à toute valeur déterminée γ il répond un nombre $\psi(\Delta)$ de valeurs α, qui satisfont aux conditions exigées et sachant d'un autre côté que γ est susceptible d'un nombre de valeurs, exprimé par $N(\Delta)$, on en conclura que les combinaisons α, γ, qui rendent $a\alpha + 2b\alpha\gamma + c\gamma$ premier à Δ, sont au nombre de $N(\Delta)\psi(\Delta)$

Le cas où D est supposé divisible par $1+i$, donne le même résultat. En effet, comme le terme $D\gamma$ est dans ce cas divisible par $1+i$, tout se réduit à faire en sorte que $a\alpha + b\gamma$ soit premier à Δ, et l'on voit facilement que les valeurs α qui, répondant à une valeur déterminée γ, satisfont à cette condition sont toujours au nombre de $\psi(\Delta)$, d'où l'on conclut que celui des combinaisons dont il s'agit, est égal à $N(\Delta)\psi(\Delta)$, comme dans le premier cas.

On voit ainsi que les valeurs simultanées de x et de y, qui, étant substituées dans l'expression $ax^2 + 2bxy + cy$, la rendent première à $(1+i)D = \Delta$, peuvent toujours être distribuées en systèmes de la forme,

$$x = \Delta v + \alpha, \qquad y = \Delta w + \gamma,$$

où v et w sont des entiers indéterminés, et α et γ des entiers déterminés et que le nombre de ces systèmes est toujours exprimé par $N(\Delta)\psi(\Delta)$.

Classification des formes et théorèmes qui s'y rapportent.

§. 16.

La classification dont il s'agit, consiste à rapporter deux quelconques des formes qui ont un déterminant commun D, à la même classe ou à des classes distinctes, suivant que ces formes sont équivalentes ou non. Nous démontrerons d'abord que les classes ainsi définies sont toujours en nombre limité, quel que soit le déterminant donné. C'est à quoi nous parviendrons, en faisant voir que dans chaque classe il existe au moins une forme (a, b, c), telle qu'on ait à la fois $\frac{1}{4}N(a) \geqq N(b)$, $N(a) \leqq N(c)$, et en prouvant ensuite que les formes de cette nature, qu'on appelle des formes *réduites*; sont toujours en nombre fini. Pour établir le premier de ces deux points, il s'agira de montrer qu'une forme quelconque (a, b, a') peut toujours se transformer en une forme réduite équivalente. Considérons à cet effet la substitution $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma,\ \delta}$, où nous n'avons que cette seule condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et observons que cette dernière sera satisfaite, si, δ restant quelconque, nous supposons $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. Au moyen de la substitution ainsi particularisée, la forme (a, b, a') se changera en une autre telle que (a', b', a''), où l'on aura $b' = -b - a'\delta$. D'après ce nous avons remarqué au commencement du §. 2, nous pouvons toujours disposer de l'indéterminée δ de manière à ce que l'on ait $\frac{1}{4}N(a') \geqq N(b')$. La nouvelle forme (a', b', a'') satisfaisant alors à la première des deux conditions qui définissent les formes réduites, si l'on a en outre $N(a') \leqq N(a'')$, cette forme aura toutes les propriétés requises; si non, on en déduira par le même procédé une troisième forme telle que (a'', b'', a'''), où l'on aura $\frac{1}{4}N(a'') \geqq N(b'')$, et qui par conséquent sera une forme réduite si l'on a en outre $N(a'') \leqq N(a''')$. Il est manifeste que, si l'on continue a opérer toujours de la même manière, on finira nécessairement par tomber sur une forme réduite équivalente à la proposée; car pour qu'il en fût autrement, il faudrait que la suite $N(a') > N(a'') > N(a''') >$ etc. pût être indéfiniment prolongée, ce qui évidemment est impossible, les entiers a', a'', a'', ... étant tous différents de zéro, si, comme on le suppose toujours, D n'est pas un quarré. Le premier point se trouvant ainsi établi, il nous reste à faire voir que les formes réduites (a, b, c) qui ont un déterminant donné D, sont en nombre limité et peuvent toujours être assignées

facilement. Les deux conditions $\frac{1}{2}N(a) \geqq N(b)$, $N(a) \leqq N(c)$, donnent d'abord $N(ac) \geqq 4N(b^2)$, et par suite $\sqrt{N(ac)} \geqq 2N(b)$. Si d'un autre côté, on applique à l'équation $ac = b^2 - D$, le théorème déjà employé dans le §. 13, on en conclura $\sqrt{N(ac)} \leqq \sqrt{N(b^2)} + \sqrt{N(-D)}$, ou ce qui revient au même, $\sqrt{N(ac)} \leqq N(b) + \sqrt{N(D)}$, inégalité qu'il suffit de comparer à celle déjà obtenue, pour voir qu'on a $N(b) \leqq \sqrt{N(D)}$. Comme $N(b)$ et par conséquent aussi b n'est ainsi susceptible que d'un nombre limité de valeurs faciles à assigner, pour obtenir toutes les formes réduites du déterminant D, il suffira de décomposer chacune des valeurs correspondantes de $b^2 - D$, de toutes les manières possibles en deux facteurs a et c, én supposant $N(a) \leqq N(c)$, et de ne conserver que celles des combinaisons a, b, c, pour lesquelles on a $\frac{1}{2}N(a) \geqq N(b)$ *).

Ayant ainsi obtenu toutes les formes réduites (a, b, c) qui répondent à un déterminant donné, si, comme nous le supposons, on n'a en vue que les formes qui appartiennent à la première espèce, il ne restera plus qu'à effacer celles des formes trouvées, pour lesquelles a, b, c ou $a, 2b, c$ auraient un diviseur commun.

Il s'agit maintenant de faire l'énumération complète des classes qui répondent au déterminant D, en choisissant dans chacune de ces classes l'une quelconque des formes dont elle se compose. Des formes choisies d'après cette règle, constitueront ce que nous appellerons un système complet de formes non-équivalentes ou plus simplement, *un système de formes* pour le déterminant dont il s'agit, Un tel système jouira évidemment de la double propriété de présenter une forme et de n'en présenter qu'une seule qui soit équivalente à une forme quelconque, pourvu que cette dernière ait l'entier D pour déterminant et soit d'ailleurs de première espèce. Pour construire un système de cette nature, on peut se servir des formes réduites que nous avons appris à déterminer dans ce qui précède. En effet, comme parmi les formes réduites il s'en trouve toujours au moins une, qui appartienne à une classe arbitrairement choisie, tout reviendra à éliminer les formes surabondantes. Après avoir rangé à cet effet les formes ré-

*) On voit que la méthode dont nous venons de faire usage pour obtenir les formes réduites, est entièrement analogue à celle qui sert pour le même objet dans la théorie des entiers réels. Nous ajouterons que la possibilité d'appliquer cette dernière aux entiers complexes, avait déjà été remarquée par Mr *Jacobi*. Tome XIX, page 314 de ce Journal.

duites dans un ordre quelconque, on commencera par comparer la première d'entre elles à chacune des suivantes et l'on effacera toutes celles de ces dernières, que l'on reconnaîtra lui être équivalentes. Cela fait, on comparera la seconde des formes que cette première opération aura laissées subsister, à chacune des suivantes pour effacer encore les formes qu'on trouvera lui être équivalentes, et ainsi de suite.

Le procédé que nous venons d'indiquer, suffit pour assigner le nombre des classes, ou ce qui revient au même, celui des termes composant un système de formes pour un déterminant quelconque, lorsque ce dernier est numériquement donné. Mais tel n'est pas l'objet principal que nous nous sommes proposé dans ce Mémoire, et qui consiste plutôt à découvrir la loi générale par laquelle le nombre des classes se trouve lié au déterminant auquel ces classes se rapportent. Pour résoudre cette dernière question, il faut pénétrer plus avant dans la nature de ce que nous avons nommé un système de formes, et se rendre compte des rapports qui existent entre un tel assemblage et la totalité des entiers que ces formes peuvent servir à représenter.

§. 17.

Soit

$$(1)\quad ax^2+2bxy+cy^2,\quad a'x^2+2b'xy+c'y^2,\quad \ldots .$$

un système de formes (de première espèce) pour le déterminant D, et proposons-nous de rechercher sous quelles conditions un entier m que nous supposerons impair et premier à D, ou réunissant ces deux conditions en une seule, que nous supposerons premier à $\Delta=(1+i)D$, peut être représenté par une ou par plusieurs de ces formes, et de déterminer, lorsque de telles représentations existent, le nombre des groupes dans lesquels leur totalité se distribue. Il est bien entendu que, comme dans ce qui précède, il n'est toujours question que de représentations pour lesquelles les indéterminées x et y soient premieres entre elles. D'après le §. 12, il y a une première condition a remplir, consistant en ce que D doit être résidu quadratique à l'égard de m, et il résulte d'un autre côté du §. 9, que, pour qu'elle soit satisfaite, il faut et il suffit que pour chacun des diviseurs simples f de m, on ait

$$(2)\quad \left[\frac{D}{f}\right]=1.$$

Ces conditions particulières étant supposées remplies, si l'on désigne par μ le nombre des facteurs simples primaires inégaux que l'entier m contient, la congruence $x^2 \equiv D \pmod{m}$, aura 2^μ racines et il s'agira de chercher quels sont les groupes de représentations qui puissent répondre à ces diverses racines. Soit l l'une quelconque de ces racines, et proposons-nous de determiner les représentations qui y appartiennent. D'après ce qui a été demontré dans le §. 12, nous avons à examinen si parmi les formes (f) il y en une qui soit équivalente à celle-ci $\left(m, l, \frac{l^2-D}{m}\right)$. Observons d'abord que les coëfficients de cette dernière sont évidemment sans diviseur commun, puisqu'un tel diviseur diviserait aussi le déterminant D, ce qui serait contraire à l'hypothèse admise d'après laquelle m est premier à D. Comme d'un autre côté, m est supposé impair, on voit que la forme précédente appartient à la première espèce, d'où il suit que la forme dont il s'agit, a son équivalente dans le système (1). Il résulte de là et du §. déjà cité, qu'il existe toujours un groupe de représentation appartenant à une racine déterminée l, et qu'il n'en existe qu'un seul, d'où l'on conclut que les représentations dont l'entier m est susceptible au moyen des expressions (1), forment toujours un nombre de groupes distincts, égal à la puissance 2^μ.

Nous pouvons maintenant réduire chacun des groupes dont il s'agit, à deux représentation individuelles, si dans chacune des formes (1), nous limitons les indéterminées x et y, au moyen de la condition d'inégalité déjà donnée dans le §. 15, cette condition étant pour la première des expressions (1),

$$(3) \quad N(ax+(b-\sqrt{D})y) < N(ax+(b+\sqrt{D})y) \leqq \sigma^2 N(ax+(b-\sqrt{D})y),$$

et se déduisant pour les autres de celle que nous venons d'écrire, en y accentuant les lettres a, b, c. Ces conditions étant jointes aux formes (1), on voit que le nombre des représentations dont m est susceptible au moyen des formes dont il s'agit sera fini et exprimé par $2^{\mu+1}$

Au moyen du resultat que nous venons d'obtenir, il est facile de former l'équation générale que nous allons écrire:

$$(4) \quad \Sigma 2^{\mu+1} F(m) =$$
$$\Sigma F(ax^2+2bxy+cy^2) + \Sigma F(a'x^2+2b'xy+c'y^2) + \text{etc.}$$

La sommation indiquée dans le premier membre est supposée embrasser la totalité des entiers m premiers à Δ, dont tous les diviseurs simples f satisfont à la condition (2), μ désignant pour chacun de ces entiers m, le

nombre de ses facteurs simples primaires inégaux. Quant aux sommes contenues dans le second membre, elles sont en même nombre que les formes (1), et répondent chacune à l'une des formes en question. Dans chacune de ces sommes le signe Σ doit s'étendre a tous les systèmes de valeurs simultanées x et y, qui remplissent la triple condition de n'avoir pas de diviseur commun, de donner à la forme où elles sont substituées, une valeur première à Δ, et enfin de satisfaire à la double inégalité (3), lorsqu'il s'agit de la première somme et à des inégalités de même forme pour chacune des autres. La fonction désignée par la caractéristique F est arbitraire et doit seulement être choisie de manière à ce que les séries contenues dans l'équation, soient convergentes et aient des sommes indépendantes de l'ordre de succession de leurs termes. La vérité de l'équation ainsi formée est évidente, et l'on voit que cette équation n'est que la traduction de la double propriété remarquée plus haut et consistant en ce que d'une part, tout entier supposé premier à Δ, pour être susceptible d'être représenté par les formes (1), doit être compris parmi ceux que nous venons de désigner par m, et en ce que d'autre part, chacun de ces derniers admet en effet $2^{\mu+1}$ représentations au moyen des expressions (1), si à chacune de ces expressions l'on suppose jointe une condition d'inégalité comme celle (3). D'après la manière dont l'équation précédente subsiste, il est manifeste qu'elle ne cessera pas d'avoir lieu, si l'on y remplace partout les entiers complexes qui se trouvent sous le signe F, par leurs normes, de sorte qu'on aura aussi

$$\Sigma 2^{\mu+1} F(Nm) =$$
$$\Sigma F(N(ax^2+2bxy+cy^2)) + \Sigma F(N(a'x^2+2b'xy+c'y^2)) + \text{etc.}$$

les signes sommatoires ayant toujours la même signification. Particularisons la fonction arbitraire contenue dans l'équation, et supposons que cette fonction soit une puissance de l'exposant $-s$, ou s est une quantité positive supérieure à l'unité. Il viendra ainsi en n'écrivant, pour abréger, que le premier terme du second membre,

$$\Sigma \frac{2^{\mu+1}}{(Nm)^s} = \Sigma \frac{1}{(N(ax^2+2bxy+cy^2))^s} + \text{etc.}$$

Comme d'après la définition des entiers m, quatre nombre associés se trouvent évidemment toujours simultanément compris ou non parmi ces entiers m, on voit que nous pouvons considérer la sommation indiquée dans le premier membre, comme ne devant plus s'etendre qu'aux entiers m qui

satisfaisant aux conditions énoncées plus haut, soient en outre primaires, c'est-à-dire tels qu'en posant $m = \alpha + \beta i$, on ait $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$, $\beta \equiv 0 \pmod{2}$, pourvu qu'en même temps nous quadruplions le premier membre. On aura ainsi

$$(5) \qquad 8\,\Sigma\,\frac{2^{\mu}}{(Nm)^{s}} = \Sigma\,\frac{1}{(N(ax^2+2bxy+cy^2))^{s}} + \text{etc.}$$

L'entier m étant primaire, on aura toujours d'une manière unique (§§. 2 et 3, V.), $m = f'^{k'} f''^{k''} \ldots.$, les exposants k', k'', ... étant tous différents de zéro, et f', f'', ... désignant des nombres premiers primaires inégaux, qui satisfont à la condition (2), et dont le nombre est exprimé par μ. Cela étant, il est facile de se convaincre qu'on a

$$(6) \qquad \Sigma\,\frac{2^{\mu}}{(Nm)^{s}} = \Pi\,\frac{1+\dfrac{1}{(Nf)^{s}}}{1-\dfrac{1}{(Nf)^{s}}},$$

le signe Π s'étendant à tous les nombres premiers impairs et primaires f, qui ne divisent pas le déterminant D et remplissent la condition (2). Il suffit de développer le facteur général comme il suit:

$$\frac{1+\dfrac{1}{(Nf)^{s}}}{1-\dfrac{1}{(Nf)^{s}}} = 1 + \frac{2}{(Nf)^{s}} + \frac{2}{(Nf)^{2s}} + \frac{2}{(Nf)^{3s}} + \text{etc.}$$

$$= 1 + \frac{2}{(Nf)^{s}} + \frac{2}{(N.f^{2})^{s}} + \frac{2}{(N.f^{3})^{s}} + \text{etc.}$$

et d'effectuer ensuite la multiplication, pour reconnaître au moyen de la remarque que nous venons de faire, que l'équation précédente est en effet exacte. Pour transformer ulterieurement le second membre de cette équation, soit q le terme général de la suite des nombres premiers impairs et primaires, à l'exclusion de ceux qui divisent D, et considérons le produit

$$\Pi\,\frac{1.}{1-\dfrac{1}{(Nq)^{s}}},$$

où le signe de multiplication est supposé s'étendre à toutes les valeurs q que nous venons de définir. Comme l'on a

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{(Nq)^{s}}} = 1 + \frac{1}{(Nq)^{s}} + \frac{1}{(N.q^{2})^{s}} + \frac{1}{(N.q^{3})^{s}} + \text{etc.}$$

et qu'on sait d'un autre côté, que tout entier impair et primaire n'est sus-

ceptible que d'une seule décomposition en facteurs simples egalement primaires, l'on voit que le produit precedent équivaut à une serie d'une loi très-simple, et que l'on a

$$(7) \qquad \Pi \frac{1}{1-\frac{1}{(Nq)^s}} = \Sigma \frac{1}{(Nn)^s},$$

le signe Σ se rapportant à tous les entiers impairs n, primaires et premiers à D. Si au lieu du produit précédent l'on considère le suivant

$$\Pi \frac{1}{1-\left[\frac{D}{q}\right]\frac{1}{(Nq)^s}}$$

on reconnaîtra que ce nouveau produit, traité de la même manière, se transforme en une série ayant pour terme général $\chi \frac{1}{(Nn)^s}$, où le coëfficient χ sera donné par la formule $\chi = \left[\frac{D}{q'}\right]^{h'}\left[\frac{D}{q''}\right]^{h''}\ldots$, si l'on suppose $n = q'^{h'} q''^{h''}\ldots$, les exposants étant positifs, et $q', q'', \ldots$ designant les nombres premiers inegaux q que l'entier n contient. Si maintenant l'on observe qu'en vertu de la troisième des équations (e) du §. 8, l'expression χ peut être remplacée par

$$\left[\frac{D}{q'^{h'}}\right]\left[\frac{D}{q''^{h''}}\right]\ldots = \left[\frac{D}{q'^{h'}q''^{h''}\ldots}\right] = \left[\frac{D}{n}\right],$$

on aura l'équation

$$(8) \qquad \Pi \frac{1}{1-\left[\frac{D}{q}\right]\left[\frac{1}{(Nq)^s}\right]} = \Sigma\left[\frac{D}{n}\right]\frac{1}{(Nn)^s}$$

dans laquelle les signes Π et Σ ont la meme signification que dans l'equation (7). Cela posé, faisons le produit des equations (7) et (8), et divisons ensuite ce produit par l'équation (7), apres avoir remplace dans cette dernière s par $2s$. Le facteur général du premier membre de l'équation que l'on obtient ainsi, sera évidemment

$$\frac{1-\frac{1}{(Nq)^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{(Nq)^s}\right)\left(1-\left[\frac{D}{q}\right]\frac{1}{(Nq)^s}\right)} = \frac{1+\frac{1}{(Nq)^s}}{1-\left[\frac{D}{q}\right]\frac{1}{(Nq)^s}}.$$

Ce facteur presente deux cas différents selon que l'on a $\left(\frac{D}{q}\right)=1$, ou $\left[\frac{D}{q}\right] = -1$. Dans le second il se reduit l'unite et peut être omis, tandis

que pour le premier il prend la forme

$$\frac{1+\frac{1}{(Nq)^s}}{1-\frac{1}{(Nq)^s}}$$

Or, les nombres premiers q pour lesquels on a $\left[\frac{D}{q}\right]=1$, coïncidant avec ceux que nous avons précédemment désignés par f, on voit que l'équation qu'il s'agit de former, est:

$$\Pi\,\frac{1+\frac{1}{(Nf)^s}}{1-\frac{1}{(Nf)^s}}=\frac{\Sigma\frac{1}{(Nn)^s}\;\Sigma\left[\frac{D}{n}\right]\frac{1}{(Nn)^s}}{\Sigma\frac{1}{(Nn)^{2s}}}.$$

Au moyen de ce résultat et de l'équation (6), l'équation (5) peut prendre la forme:

$$8\Sigma\frac{1}{(Nn)^s}.\Sigma\left[\frac{D}{n}\right]\frac{1}{(Nn)^s}=\Sigma\frac{1}{(N.n^2)^s}.\Sigma\frac{1}{(N(ax^2+2bxy+cy^2))^s}+\text{ etc.}$$

où les signes sommatoires qui se rapportent à n, s'étendent à tous les entiers primaires et premiers à Δ, tandis que ceux relatifs aux valeurs simultanées x et y, conservent la signification indiquée plus haut. Il est facile de se convaincre que les produits de séries, contenus dans le second membre, sont susceptibles d'une forme beaucoup plus simple qu'ils prennent lorsque la multiplication indiquée est effectuée. Pour leur donner cette nouvelle forme, nous considérerons particulièrement le premier de ces produits, la même transformation s'appliquant à tous les autres. En faisant le produit des termes généraux des deux sommes qu'il s'agit de multiplier entre elles, on aura:

$$\frac{1}{(N.n^2)^s(N(ax^2+2bxy+cy^2))^s}=\frac{1}{(N(ax'^2+2bx'y+cy'^2))^s},$$

où l'on a posé, $x'=nx$, $y'=ny$. Voyons quelle est la nature des systèmes x', y', auxquels la nouvelle sommation doit se rapporter. Comme l'on a $n^2(ax^2+2bxy+cy^2)=ax'^2+2bx'y'+cy'^2$, on voit d'abord, en ayant égard aux conditions que x, y, n, sont supposés remplir, 1° que pour chacun des systèmes en question, $ax'^2+2bx'y+cy'^2$ est premier à Δ, et 2° que les entiers x', y' satisfont à la double inégalité

$$N(ax'+(b-\sqrt{D})y')<N(ax'+(b+\sqrt{D})y')\leqq\sigma^2N(ax'+(b-\sqrt{D})y')$$

de même forme que celle (3), et qui résulte de cette dernière en multipliant

par $N(n)$. Il est facile de prouver réciproquement, que tout système x', y', qui satisfait à ces deux conditions, est en effet compris parmi ceux auxquels la nouvelle sommation doit s'étendre et ne s'y présente qu'une fois. C'est à quoi l'on parvient, en assignant l'entier n et le système x, y, l'un et l'autre entièrement déterminés, de la combinaison desquels le système donné x', y' provient. Soit à cet effet, $x' = nx$, $y' = nx$, où n désigne le plus grand diviseur commun primaire de x et y, qui sera complètement déterminé ainsi que les entiers x et y. Cela étant, il est évident que n est premier à Δ, et l'on voit également sans difficulté que les entiers x et y, premiers entre eux, satisfont aussi aux deux autres conditions auxquelles les systèmes x, y sont assujettis. Cela est manifeste pour celle de ces conditions, qui consiste en ce que $ax^2 + 2bxy + cy^2$ doit être premier à Δ, et pour prouver que la double inégalité (3) a pareillement lieu, il suffit de diviser par $N(n)$, celle écrite plus haut et à laquelle x' et y' sont supposés satisfaire.

Après avoir ainsi reconnu la nature des systèmes x', y', que la nouvelle sommation doit embrasser, nous pouvons supprimer les accents des indéterminées x' et y'. L'équation qu'il s'agissait de transformer, deviendra ainsi:

$$(9) \qquad 8\,\Sigma\frac{1}{(Nn)^s}\cdot\Sigma\left[\frac{D}{n}\right]\frac{1}{(Nn)^s} = \Sigma\frac{1}{(N(ax^2+2bxy+cy^2))^s} + \text{etc.}$$

où la double sommation indiquée dans le premier terme du second membre est supposée s'étendre aux valeurs simultanées x et y, telles que $ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit premier à Δ, et satisfaisant en outre à la condition (3). Quant aux autres termes, comme ils sont de même nature que celui dont nous venons de parler et résultent de ce dernier, en accentuant les lettres a, b, c, nous continuerons à ne pas les écrire. Il s'agit maintenant de transformer l'équation que nous venons d'obtenir, de manière à ce qu'elle exprime le nombre des formes non-équivalentes qui répondent au déterminant D. Ce sera là l'objet du §. suivant.

Expression du nombre des classes au moyen d'une suite infinie double.

§. 18.

Pour parvenir au but que nous avons en vue, nous aurons à examiner ce que les différents termes de l'équation (9) du §. précédent de-

viennent, lorsque la variable s que cette équation contient, converge vers sa limite qui est l'unité.

I. Occupons-nous d'abord du second membre, en nous bornant toujours à considérer la premiere des sommes dont ce membre se compose. Comme indépendamment de la double condition d'inégalité à laquelle x et y sont supposés satisfaire, ces indéterminées doivent être telles que la valeur du trinome $ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit première à Δ, on conclut du §. 15, III, que les valeurs simultanées de x et y, que la sommation embrasse, peuvent être distribuées en systèmes de la forme

$$(1) \qquad x = \Delta v + \alpha, \qquad y = \Delta w + \gamma,$$

où $v, w; \alpha, \gamma$ désignent des entiers complexes, les deux premiers indéterminés et les deux derniers déterminés, et que le nombre de ces systèmes est toujours $N(\Delta)\,\psi(\Delta)$. La somme dont il s'agit se décompose ainsi en $N(\Delta)\,\psi(\Delta)$ sommes partielles, telles que la suivante

$$(2) \qquad \Sigma \frac{1}{(N(ax^2 + 2bxy + cy^2))^s},$$

où le signe sommatoire doit s'étendre à toutes les valeurs de x et y, données par les formules (1), et en outre telles que l'on ait

$$(3) \quad N(ax + (b - \sqrt{D})y) < N(ax + (b + \sqrt{D})y \leqq \sigma^2 N(ax + (b - \sqrt{D})y).$$

Pour évaluer la somme partielle (2), soit z une variable positive, et proposons-nous de déterminer l'entier positif Z qui exprime combien de fois dans la somme dont il s'agit, l'expression $N(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ obtient une valeur non-supérieure à z. On sent que Z est une fonction discontinue très-compliquée de la variable z; mais il ne s'agira pas d'obtenir cette fonction avec une exactitude absolue, et il suffira de connaître son expression-limite, c'est-à-dire une expression dont le rapport à Z converge vers l'unité, lorsque la variable z devient infinie. D'après ce qui précède, l'entier Z désigne le nombre des combinaisons v, w, pour lesquelles on a outre la condition (3), celle que nous allons écrire

$$N(ax^2 + 2bxy + cy^2) \leqq z,$$

ou ce qui revient au même, celle-ci

$$(4) \qquad N(ax + (b + \sqrt{D})y)\, N(ax + (b - \sqrt{D})y) \leqq N(a)z,$$

x et y étant supposés remplacés dans les conditions (3) et (4) par les expressions (1).

Observons maintenant que, comme il ne s'agit que d'obtenir le nombre des combinaisons v, w, qui satisfont aux inégalités précédentes, nous pouvons remplacer les entiers v, w, par d'autres indéterminées v', w', entières ou non, mais tellement liées à v et w, qu'à toute combinaison v, w réponde une combinaison unique v', w', et réciproquement. Soit pour abréger $z = \frac{1}{\zeta^4}$, où ζ est supposé positif, il est facile de voir que nous remplirons la condition énoncée, en posant les équations linéaires $v' = \zeta\left(v + \frac{\alpha}{\Delta}\right)$, $w' = \zeta\left(w + \frac{\gamma}{\Delta}\right)$, en vertu desquelles, ζ étant réel et v, w désignant des entiers complexes indéterminés, v' et w' exprimeront l'un et l'autre des nombres complexes, dont les deux parties sont les termes généraux de progressions arithmétiques réelles, ayant la quantité ζ pour raison commune. Au moyen de ces expressions les formules (1) que nous avons à substituer dans les conditions (3) et (4), deviennent $x = \frac{\Delta v'}{\zeta}$, $y = \frac{\Delta w'}{\zeta}$. Si maintenant l'on effectue la substitution dont il s'agit, et que l'on multiplie ensuite les inégalités (3) et (4) resp. par $\frac{\zeta^2}{N(\Delta)}$ et $\frac{\zeta^4}{N(\Delta^2)}$, il viendra simplement

$$(5)\quad \begin{cases} N(av'+(b-\sqrt{D})w') < N(av'+(b+\sqrt{D})w') \leqq \sigma^2 N(av'+(b-\sqrt{D})v'), \\ N(av'+(b+\sqrt{D})w')\, N(av'+(b-\sqrt{D})w') \leqq N\left(\frac{a}{\Delta^2}\right), \end{cases}$$

de sorte que le nombre Z qu'il s'agit de déterminer, coïncide maintenant avec celui des combinaisons v', w', qui satisfont à ces dernières inégalités, dans lequelles v' et w' ont la signification indiquée plus haut. Il faut maintenant remplacer les nombres complexes, contenus dans ces inégalités, par leurs éléments réels. Posons pour cela

$$(6)\quad v' = x + x'i, \qquad w' = y + y'i,$$

où les quatre quantités réelles x, x', y, y', sont les termes généraux d'autant de progressions arithmétiques, indéfiniment prolongées dans les deux sens et dont la raison commune est ζ. Posons encore

$$(7)\quad a = \alpha + \alpha' i, \qquad b = \beta + \beta' i, \qquad \sqrt{D} = \delta + \delta' i,$$

α, α', β, ... etant des constantes réelles, et soit enfin pour abréger,

$$(8)\quad \begin{cases} p = \alpha x - \alpha' x', & q = \beta y - \beta' y', & r = \delta y - \delta' y', \\ p' = \alpha' x + \alpha x', & q' = \beta' y + \beta y', & r' = \delta' y + \delta y'. \end{cases}$$

En substituant les expressions (6) et (7), les inégalités (5) prendront la forme

$$(9)\quad \begin{cases} (p+q-r)^2+(p'+q'-r')^2<(p+q+r)^2+(p'+q'+r')^2 \leqq \\ \qquad \sigma^2((p+q-r)^2+(p'+q'-r')^2), \\ ((p+q+r)^2+(p'+q'+r')^2)((p+q-r)^2+(p'+q'-r')^2) \leqq N\left(\frac{a}{\Delta^2}\right). \end{cases}$$

Il est maintenant facile de reconnaître que l'entier Z, lorsque la variable ζ dont il est fonction, devient infiniment petite, dépend de l'intégrale suivante

$$(10)\qquad \iiiint \partial x\, \partial x'\, \partial y\, \partial y' = A,$$

dans laquelle les différentielles ∂x, $\partial x'$, ∂y, $\partial y'$ sont considérées comme positives, et qui est supposée s'étendre à toutes les valeurs des variables x, x', y, y', compatibles avec les conditions (9). En effet, si dans l'intégrale précédente l'on considère les quatre différentielles comme constantes et égales à ζ, tous les éléments de cette intégrale auront la valeur commune ζ^4, de sorte que l'intégrale sera égale au produit de ζ^4 par le nombre des combinaisons x, x', y, y', qui satisfont aux conditions (9), et dans lesquelles les variables sont supposées croître de la différence constante ζ. Or, ce dernier nombre étant précisément l'entier Z, on aura pour une valeur infiniment petite de ζ, $Z\zeta^4 = A$, et par suite $Z = \frac{A}{\zeta^4}$, ou ce qui revient au même,

$$(11)\qquad Z = Az,$$

z étant supposé infini. Il est encore facile de s'assurer qu'en même temps que le rapport des deux membres de cette dernière équation tend vers la limite 1, leur différence croît moins rapidement qu'une puissance de z, dont l'exposant constant serait tant soit peu supérieur à $\frac{3}{4}$, et généralement à $\frac{m-1}{m}$, s'il s'agissait d'une intégrale de l'ordre m *) Tout se réduit donc maintenant à obtenir la valeur A de l'intégrale (10); pour y parvenir, on pourrait faire usage d'une substitution unique, mais le calcul

---

*) Le principe dont nous faisons usage dans le texte, est évident et résulte immédiatement de la notion même d'une intégrale multiple, considerée comme une somme d'éléments infiniments petits, lorsque, comme il arrive ici, les variables ne doivent pas obtenir des valeurs infinies dans les intégrations qu'il s'agit d'effectuer; mais il est bon d'ajouter que, si, l'intégrale elle-même restant toujours finie, cette dernière circonstance n'avait plus lieu, l'application du même principe pourrait conduire à des résultats entièrement erronés, ce dont il est facile de voir la raison, et comme l'on peut d'ailleurs s'en assurer par des exemples, en considérant une intégrale double exprimant une aire finie, comprise entre une courbe et son asymptote. Quant à l'assertion que nous venons d'avancer et d'après laquelle les variables x, x', y, y' ne sauraient être infinies dans notre cas, elle résulte trop simplement des conditions (9), pour qu'il soit nécessaire de nous y arrêter.

devient beaucoup plus simple, si l'on emploie plusieurs substitutions successives. Observons que, comme l'ordre des intégrations est arbitraire, nous pouvons considérer les intégrations relatives à x et x', comme devant être effectuées les premières, et que rien ne s'oppose alors à ce que nous remplacions les variables x et x' par de nouvelles variables t et t', liées aux premières par des équations qui contiennent y et y', pourvu que dans ces équations l'on traite y et y' comme des constantes. Posons donc $t = p+q$, $t' = p'+q'$; p, q, p', q' désignant les expressions linéaires (8). Si à ces deux equations l'on applique la formule connue qui sert à la transformation des intégrales doubles, on trouvera que le produit $\partial x\partial x'$ devra être remplacé par $\frac{1}{a^2+a'^2}\partial t\partial t' = \frac{1}{N(a)}\partial t\partial t'$. En substituant cette dernière expression dans l'intégrale et les nouvelles variables dans les conditions (9), qui définissent l'étendue des intégrations, on aura

$$\iiiint \partial t\partial t'\partial y\partial y' = N(a)A,$$

$$(t-r)^2+(t'-r')^2<(t+r)^2+(t'+r')^2<\sigma^2((t-r)^2+(t'-r')^2),$$

$$((t+r)^2+(t'+r')^2)((t-r)^2+(t'-r')^2)<N\left(\frac{a}{\Delta^2}\right),$$

où nous avons supprimé les signes d'égalité qui accompagnaient ceux d'inégalité et qui sont désormais inutiles, les conditions précédentes se rapportant maintenant à des variables continues. Si en second lieu, t et t' étant considérés comme constants, nous remplaçons les variables y et y', à leur tour par de nouvelles variables r et r', liées à y et y' par les deux dernières des formules (8), l'intégrale deviendra

$$\iiiint \partial t\partial t'\partial r\partial r' = N(a\sqrt{D})A$$

les conditions qui en définissent l'étendue; étant toujours celles que nous venons d'écrire. Distribuons actuellement les quatre variables en ces deux groupes t, r; t', r', et remplaçons les resp. par ces deux nouveaux groupes x, x'; y, y', liés aux précédents par les équations

$$x = t-r,\quad x' = t+r;\qquad y = t'-r',\quad y' = t'+r',$$

en vertu desquelles il faudra mettre $\frac{1}{2}\partial x\partial x'$, $\frac{1}{2}\partial y\partial y'$ resp. a la place de $\partial t\partial r$, $\partial t'\partial r'$. L'intégrale et les conditions qui s'y rapportent, se changeront ainsi en

$$\iiiint \partial x\partial y\partial x'\partial y' = 4N(a\sqrt{D})A,$$

$$x^2+y^2<x'^2+y'^2<\sigma^2(x^2+y^2),\qquad (x^2+y^2)(x'^2+y'^2)<N\left(\frac{a}{\Delta^2}\right).$$

Remplaçons maintenant les variables de chacun des groupes $x, y;\ x', y'$ par des coordonnées polaires, en posant

$$x = \varrho\cos\theta,\quad y = \varrho\sin\theta;\qquad x' = \varrho'\cos\theta',\quad y' = \varrho'\sin\theta',$$

où il importe de remarquer qu'indépendamment des conditions auxquelles les nouvelles variables doivent satisfaire en vertu des inégalités précédentes, il faudra regarder ϱ comme positif et θ comme étant compris entre les limites 0 et 2π, pour qu'à une même combinaison x, y ne réponde pas plus d'une combinaison ϱ, θ; et que ϱ', θ' doivent être assujettis à la même limitation. Par l'introduction de ces nouvelles variables, il viendra

$$\iiiint \varrho\varrho'\partial\varrho\,\partial\varrho'\,\partial\theta\,\partial\theta' = 4N(a\sqrt{D})A,\quad \varrho^2<\varrho'^2<\sigma^2\varrho^2,\quad \varrho^2\varrho'^2<N\left(\frac{a}{\varDelta^2}\right).$$

Les conditions d'inégalité ne contenant pas les variables θ et θ', les intégrations qui s'y rapportent, devront s'étendre depuis 0 jusqu'à 2π; en effectuant ces deux intégrations et remplaçant en outre ϱ^2, ϱ'^2 resp. par ϱ, ϱ', de sorte que ces nouvelles variables devront être considerées comme positives, on trouvera

$$\iint \partial\varrho\,\partial\varrho' = \frac{4}{\pi^2}N(a\sqrt{D})A,\qquad \varrho<\varrho'<\sigma^2\varrho,\qquad \varrho\varrho'<N\left(\frac{a}{\varDelta^2}\right).$$

Si maintenant, ϱ étant regardé comme constant, nous remplaçons ϱ' par une nouvelle variable ν, déterminée par l'équation $\varrho' = \nu\varrho$, et qui en vertu de ce qui précède, doit être considérée comme positive, nous aurons d'abord

$$\iint \varrho\,\partial\varrho\,\partial\nu = \frac{4}{\pi^2}N(a\sqrt{D})A,\qquad 1<\nu<\sigma^2,\qquad \varrho^2<N\left(\frac{a}{\varDelta^2}\right)\frac{1}{\nu},$$

et par suite, en effectuant l'intégration relative à ϱ, et qui doit s'etendre depuis $\varrho^2 = 0$ jusqu'à $\varrho^2 = N\left(\frac{a}{\varDelta^2}\right)\frac{1}{\nu}$,

$$\int \frac{\partial\nu}{\nu} = \frac{8}{\pi^2}N(\varDelta^2\sqrt{D})A,\qquad 1<\nu<\sigma^2,$$

d'où l'on conclut enfin

$$A = \frac{\pi^2\log\sigma}{4N(\varDelta^2\sqrt{D})}.$$

Après avoir ainsi déterminé le coëfficient A, contenu dans l'équation (11), il sera facile de voir ce que la somme partielle (2) devient, lorsque l'exposant s converge vers l'unité, ou ce qui revient au même, lorsque la variable positive ϱ, supposée liée à s par l'équation $s = 1+\varrho$, est considérée comme infiniment petite. En effet, comme la fonction Z, qui exprime combien de fois dans la somme en question, l'expression $N(ax^2+2bxy+cy^2)$

obtient une valeur qui ne surpasse pas celle de z, est telle que les deux rapports $\frac{Z}{Az}$, $\frac{Z-Az}{z^{\gamma}}$, où γ désigne une constante supérieure à la fraction $\frac{1}{2}$, convergent le premier vers une limite égale à l'unité, le second vers la limite zéro, lorsque la variable z devient plus grande que toute grandeur donnée, on conclut sur le champ du lemme démontré dans le §. 1. du Mémoire déjà plusieurs fois cité, que pour une valeur infiniment petite de ϱ, la somme (2) prend cette forme très-simple

$$\frac{A}{\varrho} = \frac{\pi^2 \log \sigma}{4N(\varDelta^2\sqrt{D})} \cdot \frac{1}{\varrho} \ ^{*)}.$$

Comme cette expression ne présente rien que soit particulier à la somme partielle que nous avons considérée, ni même rien qui soit particulier à la somme totale dont cette somme partielle fait partie, puisqu'elle n'est fonction que du seul déterminant D, commun à toutes les formes quadratiques contenues dans le second membre de l'équation (9) §. 17, l'on voit qu'il suffit de la multiplier par le nombre $N(\varDelta)\psi(\varDelta)$, qui est celui des sommes partielles contenues dans une même somme totale, et par celui des formes qui constituent un système complet relativement au déterminant D, pour en conclure la valeur du second membre de l'équation dont il s'agit, pour le cas où l'on y considère ϱ comme infiniment petit. Il viendra ainsi

$$(12) \qquad \frac{\pi^2 \psi(\varDelta) \log \sigma}{4N(\varDelta\sqrt{D})} H \frac{1}{\varrho},$$

H désignant le nombre des classes qui répondent au déterminant D.

II. Il s'agit maintenant de considérer le premier membre de l'équation citée. Ce membre pouvant se mettre sous la forme

$$4\Sigma \frac{1}{(Nn)^s} \times 2\Sigma \left[\frac{D}{n}\right] \frac{1}{(Nn)^s},$$

---

*) Quoique les deux propriétés dont nous venons de faire usage, ressortent l'une et l'autre avec évidence des considérations indiquées plus haut, il peut être bon de faire remarquer que la première de ces propriétés suffit à elle seule pour en tirer la conclusion que nous venons d'énoncer. C'est ce qui résulte d'une remarque déjà faite dans le Mémoire précédent, et d'après laquelle le lemme dont il s'agit, comporte plus d'étendue qu'il n'a été nécessaire de lui donner à l'endroit cité. Il est en effet facile de reconnaître que la vérité de ce lemme ne suppose qu'une seule condition, consistant en ce que la fonction, désignée par $f(t)$ dans son énoncé, doit être telle que l'on ait $\frac{f(t)}{t} = c$, lorsque t obtient une valeur infinie. Pour s'en assurer, on n'aura qu'à apporter une modification assez légère et qui se présente facilement, à la démonstration qui a été exposée dans le précédent Mémoire.

occupons-nous d'abord du premier de ces deux facteurs. Comme la somme dont il s'agit, doit s'étendre à tous les entiers n, premiers à $\varDelta$ et en outre primaires, ils est évident que nous pouvons faire abstraction de la dernière de ces deux conditions, pourvu qu'en même temps nous omettions le facteur 4. Les valeurs que n doit recevoir, peuvent se distribuer en systèmes de la forme $n = \varDelta v + \alpha$, v et α désignant des entiers complexes, le premier indéterminé, le second déterminé pour chaque système, et devant être égalé successivement à tous ceux des termes d'un système de résidus pour le module $\varDelta$, qui n'ont pas de diviseur commun avec ce module. Considérons la somme partielle, répondant à l'un quelconque de ces termes, et qui est

$$\Sigma \frac{1}{(N(\varDelta v + \alpha))^{1+\varrho}}.$$

Pour en obtenir la valeur, soit z une variable positive et Z la fonction discontinue de cette variable, qui exprime le nombre des entiers v pour lesquels on a $N(\varDelta v + \alpha) \leqq z$. Si nous posons, pour abréger, $z = \frac{1}{\zeta^2}$, ζ étant positif, et que nous remplacions v par une nouvelle indéterminée v' telle qu'on ait $v' = \zeta\left(v + \frac{\alpha}{\varDelta}\right)$, l'inégalité précédente se changera en $N(v') \leqq \frac{1}{N(\varDelta)}$, et Z désignera alors le nombre des valeurs v' qui satisfont à cette dernière. Or, comme en posant $v' = x + x'i$, x et x' seront évidemment les termes généraux de deux suites dont la première différence est constante et égale à ζ, on voit, comme plus haut, que pour une valeur infinie de z, l'on aura $Z = Bz$, B désignant l'intégrale $\iint \partial x \, \partial x'$, $x^2 + x'^2 < \frac{1}{N(\varDelta)}$. Mais cette dernière étant évidemment égale à $\frac{\pi}{N(\varDelta)}$, on conclura du lemme déjà employé dans le précédent n°, que la somme partielle que nous considérons, se réduit simplement à $\frac{\pi}{N(\varDelta)} \frac{1}{\varrho}$, lorsque la variable ϱ est supposée devenir moindre que toute grandeur donnée; d'où il suit enfin

$$(13) \qquad 4\Sigma \frac{1}{(Nn)^{1+\varrho}} = \frac{\pi\psi(\varDelta)}{N(\varDelta)} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

le signe s'étendant, comme dans l'équation (9) du §. 18, à tous les entiers n, premiers à $\varDelta$ et en outre primaires.

III. Pour mettre enfin la seconde des deux sommes rappelées au commencement du n° précédent, sous la forme appropriée à notre but, il faut distinguer plusieurs cas différents que le déterminant D peut présenter.

Observons pour cela que, si nous réunissons en un seul quarré tous les facteurs doubles de D, nous pourrons toujours mettre cet entier sous la forme

$$(14)\qquad D = \chi Q V^2,$$

χ ayant l'une de ces quatre valeurs

$$(15)\qquad \chi = 1,\ \ \chi = i,\ \ \chi = 1+i,\ \ \chi = i(1+i),$$

et Q ou $-Q$ désignant un produit de facteurs simples impairs et primaires, tous inégaux, sans exclure le cas où l'on aurait $Q = \pm 1$, qui ne peut toutefois avoir lieu qu'autant qu'on n'a pas $\chi = 1$, les déterminants quarrés étant toujours exclus. Nous ajouterons que les entiers χ, Q, V, s'ils doivent être tels que nous venons de les définir, seront complètement déterminés pour tout déterminant donné, si ce n'est que Q et V^2 peuvent être simultanément remplacés par $-Q$ et $(Vi)^2$. Cela posé, nous allons transformer l'expression $\left[\frac{D}{n}\right]$ au moyen des équations (e) et (f) du §. 8. On a d'abord évidemment en vertu des équations citées,

$$\left[\frac{D}{n}\right] = \left[\frac{\chi Q V^2}{n}\right] = \left[\frac{\chi}{n}\right]\left[\frac{Q}{n}\right] = \left[\frac{\chi}{n}\right]\left[\frac{n}{Q}\right].$$

Pour transformer le facteur $\left[\frac{\chi}{n}\right]$, il devient nécessaire d'introduire explicitement les deux entiers réels contenus dans n; posons donc $n = \lambda + \nu i$, λ et ν étant resp. des formes $4k+1$, $2k$. Il viendra alors suivant les quatre cas déjà distingués (15), et en ayant egard aux deux premières des équations (f) citées,

$$\left[\frac{\chi}{n}\right] = 1,\qquad \left[\frac{\chi}{n}\right] = (-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}},\qquad \left[\frac{\chi}{n}\right] = (-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}},$$
$$\left[\frac{\chi}{n}\right] = (-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}+\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$$

Pour réunir ces quatre expressions en une seule formule, nous poserons $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, les signes ambigus étant choisis suivant les quatre cas que χ peut présenter en vertu des équations (15), comme il suit

$$(16)\qquad \delta = 1,\ \ \varepsilon = 1;\quad \delta = -1,\ \ \varepsilon = 1;\quad \delta = 1,\ \ \varepsilon = -1;$$
$$\delta = -1,\ \ \varepsilon = -1.$$

Cette convention admise, nous aurons pour tous les cas

$$\left[\frac{\chi}{n}\right] = \delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}\ \varepsilon^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$$

Au moyen de cette dernière expression et de celles déjà obtenues, le facteur du premier membre de l'équation (9) (§. 7.), qu'il s'agissait de trans-

former, prendra la forme

$$(17)\qquad 2\Sigma\left[\frac{D}{n}\right]\frac{1}{(Nn)^{1+\varrho}} = 2\Sigma\,\delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}\,\varepsilon^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}\left[\frac{\lambda+\nu i}{Q}\right]\frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\varrho}}.$$

IV. Si maintenant nous substituons les expressions (12), (13) et (17) dans l'équation citée, et que nous effacions le facteur $\frac{1}{\varrho}$, et les autres facteurs, communs aux deux membres, l'équation dont il s'agit, prendra la forme:

$$(18)\qquad H = \frac{8N(\sqrt{D})}{\pi\log\sigma}\,\Sigma\,\delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}\,\varepsilon^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}\left[\frac{\lambda+\nu i}{Q}\right]\frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\varrho}}.$$

Telle est la suite infinie double qui exprime le nombre des classes pour un déterminant quelconque non-quarré D, et dans laquelle nous avons conservé la quantité infiniment petite ϱ, qui ne doit être annulée qu'après que l'on aura fixé l'ordre dans lequel les termes de la double somme doivent se suivre, pour que cette somme soit en effet la limite de celle qui répond à une valeur infiniment petite de la variable positive ϱ. La signification des lettres qui entrent dans l'équation, a été fixée dans ce qui précède, et l'on devra se rappeler que la double sommation doit s'étendre à tous les couples d'entiers réels λ et ν, respectivement des formes $4k+1$, $2k$, et tels que l'entier complexe correspondant $\lambda+\nu i$ soit premier à D.

Pour effectuer la double sommation, il faudra d'abord transformer le facteur $\left[\frac{\lambda+\nu i}{Q}\right]$ au moyen de l'équation (h) du §. 8, et remplacer ensuite les nouveaux symboles ainsi introduits, par une suite finie de sinus ou de cosinus, en se servant pour cet objet des formules connues, dues à Mr. *Gaufs*. Après ces deux substitutions, l'une des deux sommations pourra être exécutée au moyen d'une suite trigonométrique, dont la somme a éte donnée par *Euler*, et la suite infinie double, réduite par-là à une série simple, se décomposera alors en plusieurs séries partielles qui rentrent dans celles par lesquelles *Abel* et Mr. *Jacobi* ont développé les fonctions trigonométriques de l'amplitude d'une fonction elliptique de première espèce. Mais si avec le secours des formules dont les illustres géomètres que nous venons de citer, ont enrichi l'Analyse, la sommation en elle-même ne présente pas de difficulté réelle et n'exige que peu d'espace, il n'en est pas de même de la discussion à laquelle il faut soumettre le résultat qui s'en déduit, pour en reconnaître la véritable nature. Comme le résultat dont il s'agit, se trouve dépendre de la division en parties égales de la fonction

elliptique complète de première espèce, pour le cas ou le module a la valeur $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et où le nombre de ces parties égales est un entier complexe; et que la théorie des équations algébriques qui se rapportent à une telle division, n'a été qu'ébauchée jusqu'à présent *): il sera nécessaire d'entrer à cet égard dans de nouveaux développements dont l'étendue excéderait de beaucoup les bornes que nous avons dû imposer à cette première partie de notre travail. C'est pourquoi et comme nous en avons déjà averti, nous réserverons ces détails pour la seconde partie, et nous terminerons celle-ci par l'examen des deux cas particuliers, déjà mentionnés dans le préambule du présent Mémoire.

Examen de deux cas particuliers.

§. 19.

Les deux cas qu'il s'agit de considérer, sont ceux où le déterminant D est un entier réel ou le produit d'un tel entier par i. Comme en vertu de l'équation (18) du §. précédent, le nombre des classes est évidemment le même pour deux déterminants opposés, nous pourrons toujours considérer comme positif, l'entier dont il vient d'être question.

I. Soit en premier lieu D un entier positif non-quarré, et soit S^2 le plus grand quarré reel qui divise D. Nous aurons alors l'un de ces deux cas

$$(1) \quad D = PS^2, \quad D = 2PS^2,$$

P désignant un produit de nombres premiers positifs, impairs et tous inégaux, produit qui peut d'ailleurs se réduire à l'unité dans le second des deux cas précédents. Comme, en considérant P comme complexe, cet entier ou son opposé est primaire et n'a que des facteurs simples inégaux, il suffit de mettre la seconde des équations (1) sous la forme $D = iP((1-i)S)^2$, pour reconnaître que les équations (14), (15) et (16) du §. 18, qui se rapportent à un déterminant quelconque, donnent relativement au cas particulier qui nous occupe, $Q = P$, $\varepsilon = 1$, $\delta = \pm 1$, où il faut choisir le signe supérieur ou le signe inférieur dans la dernière de ces équations, selon que D présente le premier ou le second des deux cas (1). En substituant ces valeurs dans l'expression générale de H, et remplaçant en même temps σ par sa valeur,

*) Voir un Mémoire d'*Abel*, inséré dans ce Journal, Tome III, pag. 160.

donnée par la formule (3) du §. 14, ainsi que $\left[\frac{\lambda+\nu i}{P}\right]$ par l'expression équivalente, fournie par la première des équations (g) du §. 8, il viendra

$$(2)\qquad H = \frac{8D}{\pi\varkappa\log(\tau+\upsilon\sqrt{D})}\sum\delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}\left(\frac{\lambda^2+\nu^2}{P}\right)\frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\varrho}},$$

de sorte que la double somme ne contient plus l'entier complexe $\lambda+\nu i$, mais seulement sa norme $\lambda^2+\nu^2$. Il est vrai que cet entier semble y entrer encore implicitement par la condition, en vertu de laquelle $\lambda+\nu i$ doit être premier à D; mais ce dernier entier étant réel, on voit que la condition dont il s'agit, revient à celle que D et $\lambda^2+\nu^2$ doivent être sans diviseur commun.

II. Considérons en second lieu un déterminant de la forme, $D=D'i$, D' étant un entier positif qu'il faudra seulement supposer tel que $2D'$ ne soit pas un quarré, sans quoi D serait lui-même un quarré. Si nous désignons par S'^2 le plus grand quarré réel qui divise $2D'$, nous aurons l'une ou l'autre de ces deux équations,

$$(3)\qquad 2D' = P'S'^2,\qquad 2D' = 2P'S'^2,$$

dans lesquelles P' est un produit de nombres premiers positifs, impairs et inégaux, et S' étant pair dans la première de ces deux équations. Ces équations donnent respectivement celles-ci,

$$D = P'((1+i)\tfrac{1}{2}S')^2,\qquad D = P'iS'^2,$$

qu'il suffit de comparer aux équations déjà citées du §. 18, pour voir que nous avons $Q=P'$, $\varepsilon=1$, $\delta=\pm1$, le signe supérieur ou le signe inférieur devant être choisi, selon que $2D'$ présente le premier ou le second des deux cas (3). Au moyen de ces valeurs et par des transformations analogues à celles que nous avons opérées dans le n° précédent, l'on trouvera

$$(4)\qquad H = \frac{8D'}{\pi\varkappa\log(\tau+\upsilon\sqrt{2D'})}\sum\delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}\left(\frac{\lambda^2+\nu^2}{P'}\right)\frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\varrho}},$$

$\varkappa$, τ, υ ayant la même signification que dans l'équation (4) du §. 14, et la double sommation devant s'étendre à tous les couples d'entiers réels λ, ν, resp. compris dans les formes $4k+1$, $2k$, et tels que $\lambda^2+\nu^2$ soit premier à D.

III. Nous allons maintenant faire voir que les sommes doubles (2) et (4) peuvent être remplacées chacune par un produit de deux séries

simples. La transformation qu'il s'agit d'effectuer, n'est qu'une application très-particulière de certaines équations générales dont nous avons eu à faire usage dans le précédent Mémoire (§. 6, V.); mais, pour mieux faire sentir le principe sur lequel cette transformation repose, il nous paraît préférable de la rattacher à un théorème arithmétique très-simple et susceptible d'une démonstration tout élémentaire. Voici en quoi consiste ce théorème:

„m désignant un entier positif et impair donné, le nombre des solutions de l'équation $m = x^2 + y^2$, dans laquelle x et y sont des entiers „réels indéterminés, est égal au quadruple excès du nombre des diviseurs „(positifs) de m, qui sont compris dans la forme $4k+1$, sur celui de ces „diviseurs qui ont la forme $4k+3$." *)

Comme les entiers x et y, qui satisfont à l'équation précédente, sont toujours l'un pair, l'autre impair, on voit que, si l'on considère l'un de ces entiers, le second par exemple, comme devant être pair, le nombre des solutions se réduira de moitié, et l'on voit également que, si l'on suppose en outre x, pris avec son signe, de la forme $4k+1$, le nombre des solutions éprouvera une seconde réduction de même étendue, et deviendra simplement égal à l'excès défini dans l'énoncé, puisqu'à une même valeur de y, répondent toujours deux valeurs opposées de x, qui sont l'une de la forme $4k+1$, l'autre de celle-ci $4k+3$. Au moyen de ce résultat, il est facile de former l'équation générale que nous allons écrire,

$$\Sigma F(x^2+y^2) = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} F(nn'),$$

et dans laquelle la double sommation, indiquée dans le premier membre, doit s'étendre à tous les entiers positifs ou négatifs x et y, resp. compris dans les formes $4k+1$, $2k$, tandis que celle du second membre est supposée embrasser tous les entiers impairs et positifs, n et n'. D'après la manière dont cette équation subsiste, il est encore évident qu'elle ne cessera pas d'avoir lieu, si aux conditions énoncées nous ajoutons celles que x^2+y^2 soit premier à un entier réel donné K, et qu'il en soit de même du produit nn', ces nouvelles conditions n'ayant d'autre effet que de supprimer les mêmes termes de part et d'autre. Ainsi restreintes, les indéterminées x et y auront la même signification que celles désignées par λ et ν dans les sommes (2) et (4), en supposant respectivement $K = D$, ou $K = D'$,

*) Voyez pour la démonstration de ce théorème, dû à Mr. *Jacobi*, le Tome XII de ce Journal, pag. 167, ou le Mémoire cité, §. 7.

tandis que n et n' devront être resp. supposés premiers à D ou à D'. Cela posé, si dans les deux sommes (2) et (4) nous remplaçons l'exposant de δ, par le produit $\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}\cdot\frac{\lambda^2+\nu^2+1}{2}=\frac{(\lambda^2+\nu^2)^2-1}{8}$, ce qui est permis, le facteur ajouté étant impair, il suffira de supposer la fonction arbitraire $F(z)$ de la forme,

$$\delta^{\frac{z^2-1}{8}}\left(\frac{z}{P}\right)\frac{1}{z^{1+\varrho}},$$

pour conclure de l'équation en question, que la somme double (2), est équivalente à celle-ci

$$\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\delta^{\frac{(nn')^2-1}{8}}\left(\frac{nn'}{P}\right)\frac{1}{(nn')^{1+\varrho}},$$

où le signe Σ se rapporte à tous les entiers positifs n et n', impairs et premiers à D. Observons maintenant que, l'exposant de δ étant toujours pair ou impair en même temps que le nombre $\frac{n^2-1}{8}+\frac{n'^2-1}{8}$, comme nous avons déjà eu occasion de le remarquer dans le §. 8, nous pouvons le remplacer par ce dernier. Par cette substitution, le terme général de la somme précédente se changera en un produit de deux facteurs qui ne contiennent chacun qu'un seul des entiers n et n', de sorte que la somme elle-même prendra la forme d'un produit de deux séries simples. On obtient ainsi et en substituant dans l'équation (2), celle que nous allons écrire:

$$(2') \qquad H=\frac{8D}{\pi\varkappa\log(\tau+v\sqrt{D})}\,\Sigma\,\delta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}\cdot\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\delta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

chacune des deux sommations indiquées s'étendant à tous les entiers positifs n, impairs et premiers à D. Pour plus de simplicité, nous avons remplacé n' par n, ce qui est permis, ces deux lettres ayant la même signification et ne se trouvant plus maintenant mêlées dans une même sommation, et nous avons en outre réduit à zéro la variable infiniment petite ϱ; les sommes précédentes étant en effet les limites de celles où l'on aurait conservé la quantité ϱ, pourvu que dans ces sommes l'on considère les entiers n comme formant une suite croissante, comme il est facile de s'en assurer, et comme on l'a d'ailleurs prouvé, en établissant les résultats qu'il sera nécessaire de rappeler dans le n° suivant. L'équation (4) étant soumise aux mêmes transformations, se changera en celle-ci:

$$(4') \qquad H=\frac{8D'}{\pi\varkappa\log(\tau+v\sqrt{2D'})}\,\Sigma\,\delta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P'}\right)\frac{1}{n}\cdot\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\delta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P'}\right)\frac{1}{P'}$$

IV. Il faut maintenant rappeler les résultats qui se rapportent aux formes quadratiques à coëfficients réels, pour les comparer à ceux que nous venons d'établir. C'est ce que nous allons faire, en choisissant les notations de manière à faciliter la comparaison dont il s'agit. Dans le Mémoire précédent (§. 6, équat. 23), on a démontré que relativement à un déterminant positif non-quarré D, le nombre des classes que nous désignerons par h_1, est donné par l'équation

$$(5) \qquad h_1 = \frac{2\sqrt{D}}{\log(\tau + v\sqrt{D})} \Sigma\, \theta^{\frac{n-1}{2}} \delta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}.$$

Dans cette équation la signification des lettres τ, v, δ, P et n, est la même que dans les équations précédentes (1), (2) et (2′), et la sommation a la même étendue que celles indiquées dans la dernière de ces équations. Quant à la lettre θ, elle désigne l'unité positive ou négative, selon que P est de la forme $4k+1$ ou de celle-ci $4k+3$. Si nous considérons en second lieu le déterminant opposé $-D$, et que nous dénotions par h_2 le nombre des classes qui y répondent, il résulte de l'équation (19) du §. déjà cité, qu'on aura

$$(6) \qquad h_2 = \frac{2\sqrt{D}}{\pi} \Sigma (-\theta)^{\frac{n-1}{2}} \delta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n},$$

la signification de toutes les lettres et l'étendue de la sommation restant toujours les mêmes. Or, θ étant toujours de la forme ± 1, l'on voit que les deux séries contenues dans les équations (5) et (6), coïncident avec celles de l'équation (2′), de sorte qu'en divisant cette dernière par le produit des deux autres (5) et (6), on trouvera ce résultat très-simple

$$H = \frac{2}{x} h_1 h_2.$$

L'autre cas qui est celui d'un déterminant de la forme $D'i$, conduit à un résultat analogue; il suffit pour l'obtenir, de remplacer dans ce qui précède, les équations (5) et (6), par celles au moyen desquelles s'expriment les nombres h_1 et h_2 des classes réelles qui répondent aux déterminants $2D'$ et $-2D'$. On trouve alors

$$H = \frac{1}{x} h_1 h_2.$$

Nous avons donc ces deux théorèmes très-remarquables.

„D désignant un entier positif non-quarré, soit H le nombre des classes dans lesquelles se distribuent les formes à coëfficients complexes

et au déterminant D, soient encore h_1 et h_2 les nombres des classes pour les formes à coëfficients réels, répondant respectivement aux deux déterminants D et $-D$; toutes ces formes étant supposées telles que les coëfficients extrêmes et le double coëfficient moyen ne présentent pas de diviseur commun. Cela étant, l'on aura toujours $H = 2h_1 h_2$, ou $H = h_1 h_2$, selon que l'équation indéterminée $t^2 - Du^2 = -1$, admettra des solutions réelles ou non."

„D désignant un entier positif dont le double ne soit pas un quarré, si l'on suppose que les lettres H, h_1, h_2, en conservant une signification analogue à celle de l'énoncé précédent, se rapportent maintenant aux déterminants Di, $2D$, $-2D$, on aura $H = h_1 h_2$, ou $2H = h_1 h_2$, selon que l'équation $t^2 - 2Du^2 = -1$, admettra des solutions réelles ou non." *)

Quoique les théorèmes précédents ne contiennent aucun élément qui ne soit relatif aux nombres entiers, il paraît difficile de les établir par des considérations purement arithmétiques, tandis que la méthode mixte dont nous venons de faire usage, et qui est fondée en partie sur l'emploi de quantités variant par degrés insensibles, nous y a conduit de la manière la plus naturelle et, pour ainsi dire, sans effort.

*) On suppose tacitement dans ces énoncés, comme on le fait ordinairement, que pour un déterminant négatif on n'admette que des formes réelles dont les coëfficients extrêmes soient positifs. Si on n'adoptait pas cet usage, le nombre h_2 aurait une valeur double de celle que nous lui supposons, et les deux énoncés seraient à modifier en conséquence.

Fautes à corriger dans ce Mémoire.

Page	284	*ligne*	20	étendues *lisez* étendus
—	296	—	20	donc *l.* dont
—	298	—	25	douc *l.* donc
—	301	—	29	appelerons *l.* appellerons
—	306	—	8	ou *l.* au
—	—	—	18, 25	à μ *l.* à m
—	336	—	29	connues l. continues
—	337	—	5	ces *l.* ses
—	—	—	7	Car *l.* ; car
—	348	—	18	ce nous *l.* ce que nous.
—	354	—	17	$\left[\frac{1}{(Nq)^s}\right]$ *l.* $\frac{1}{(Nq)^s}$
—	359	—	27	infiniments *l.* infiniment
—	362	—	9	que *l.* qui
—	389	—	31	$\frac{1}{P'}$ *l.* $\frac{1}{n}$

24.

Theorie der Centralen.

(Vom Herrn H. Grafsmann, Lehrer der Mathematik zu Stettin.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 21. im vorigen Heft.)

---

§. 6. Besondere Beziehungen, wenn der Pol im Unendlichen liegt.

Unter den besonderen Fällen, welche daraus hervorgehen, dafs von den Puncten PSQ einer in unendlicher Entfernung liegt, oder zwei zusammenfallen, zeichnen sich besonders drei Fälle als Quellen reichhaltiger Folgerungen aus; nämlich, erstens, wenn der Pol P in eine unendliche Entfernung rückt; zweitens, wenn P mit einem der Puncte S, und drittens, wenn einer der Puncte Q mit einem der Puncte S zusammenfällt. Wir behandeln in diesem Paragraph nur den ersten Fall, wenn P unendlich weit entfernt ist, während wir zugleich voraussetzen, dafs alle Puncte $S_1 \ldots . S_n$ in endlicher Entfernung liegen. Dann verwandelt sich die Gleichung

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1} \ldots . \frac{QS_n}{PS_n}\right)^m = 0,$$

welche die Puncte Q bestimmt, in die Gleichung

$$(QS_1 \ldots . QS_n)^m = 0.$$

Setzt man nämlich $PS_2 = PS_1 + S_1S_2$, so fällt S_1S_2, als endliches Stück, gegen das unendliche PS_1 weg; man kann also PS_2 und alle anderen Entfernungen $PS_3 \ldots . PS_n$ gleich PS_1 setzen, und erhält dann durch Multiplication mit $(PS_1)^m$ die obige Gleichung, durch welche die harmonischen Mitten $m$ter Ordnung Q zwischen den in einer Geraden liegenden Puncten $S_1 \ldots . S_n$ in Bezug auf den unendlich entfernten Punct dieser Geraden, oder die Mitten $m$ter Ordnung zwischen jenen Puncten schlechthin, bestimmt werden. Für den ersten Grad hat man $QS_1 + QS_2 + \ldots . + QS_n = 0$; also ist Q dann das Centrum der mittleren Entfernungen, oder kurzweg, die Mitte zwischen den Puncten $S_1 \ldots . S_n$, oder der Schwerpunct derselben, wenn alle gleich an Gewicht gedacht werden. Da nun die aus

einem unendlich entfernten Puncte gezogenen Geraden alle unter sich parallel sind, so läfst sich der allgemeine Satz für diesen Fall wie folgt aussprechen:

„*Zieht man durch eine Oberfläche eine bewegliche Gerade von constanter Richtung, welche die Oberfläche in den Puncten* $S_1 \ldots\ldots S_n$ *schneidet, und setzt in ihr einen Punct* Q *so, dafs die Summe sämmtlicher Producte zu* m *Factoren, welche sich aus seinen Entfernungen von den* n *Durchschnittspuncten bilden lassen, gleich* 0 *ist, so ist der Ort dieses Punctes eine Oberfläche* m*ter Ordnung.*"

Wir nennen dieselbe die jener (constanten) Richtung zugehörige *m*te Centrale der Oberfläche. Ist insbesondere der Punct *Q* die Mitte (s. oben) zwischen den *n* Durchschnittspuncten, so ist sein Ort eine Ebene, und in Bezug auf Curven eine Gerade. Diese Ebene ist die jener Richtung zugehörige *Durchmesser-Ebene* der Oberfläche; die Gerade ist der ihr zugehörige *Durchmesser* der Curve. Beide sind also nichts anders, als die jener Richtung zugehörigen ersten Centralen der Oberfläche oder Curve. Um nun die Gleichung der zu einer Richtung gehörigen *m*ten Centrale aufzustellen, läfst sich nicht unmittelbar die in dem allgemeinen Satz angegebene Methode anwenden, indem der Axendurchschnitt, der dort immer in *P* angenommen wurde, nicht füglich in unendlicher Entfernung angenommen werden kann. Man kann zu dem Ende die eine der Richt-Axen, etwa die *x* Axe der gegebenen Richtung, für welche die Centrale gesucht wird, parallel annehmen, und nun einen zwiefachen Weg einschlagen. Entweder man wandelt zunächst die Gleichung der gegebenen Oberfläche *n*ter Ordnung so um, dafs der Axendurchschnitt nach dem unendlich entfernten Puncte der *x* Axe verlegt wird, dafs man dann nach dem allgemeinen Satze die Gleichung für die *m*te Centrale dieses Punctes ableitet und dann wieder die so gefundene Gleichung so umwandelt, dafs der Axendurchschnitt wieder nach dem ursprünglichen Puncte zurück versetzt wird: oder man entwickelt die Gleichung dieser Centrale, ganz unabhängig von dem allgemeinen Satze, nach der Analogie des für den Beweis dieses Satzes selbst angewandten Verfahrens. Da das erste Verfahren, welches auf eine blofse Anwendung allgemein bekannter analytischer Operationen hinausläuft, kein weiteres Interesse darbietet, so wählen wir das zweite; wodurch wir zugleich den Vortheil gewinnen, eine Reihe von Schlüssen im

Zusammenhange verfolgen zu können, welche bei der Entwickelung des allgemeinen Satzes nur sehr zerstreut und stückweise gegeben waren.

Die Aufgabe ist hier diese. Es ist eine Oberfläche $n$ter Ordnung und ein Axenkreuz gegeben: man ziehe mit der z-Axe desselben parallel eine bewegliche Gerade, welche die Oberfläche in den Puncten $S_1 \dots . S_n$ schneidet: es soll der Ort des durch die Gleichung

$$[I] \quad (QS_1 \dots . QS_n)^{\dot{m}} = 0$$

bestimmten Punctes Q gesucht werden.

Es seien wieder x, y, z die Richtstücke des Punctes S und x', y', z' die des Punctes Q. Die Gleichung der Oberfläche sei

$$[II] \quad \Sigma z^a f_{n-a}(x, y) = 0,$$

wo f_{n-a} eine Function vom $(n-a)$ten Grade bezeichnet.

Der Durchschnitt der beweglichen Geraden mit der xy-Ebene sei R, so ist, da die Gerade mit der z Axe parallel ist,

$$[III] \quad RQ = z', \quad RS = z; \quad y = y', \quad x = x'.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke verwandelt sich zuerst, da $QS_1 = QR + RS_1 = RS_1 - RQ = z_1 - z'$ ist, die Gleichung [I] in

$$[(z_1 - z') \dots . (z_n - z')]^{\dot{m}} = 0.$$

Dies nach Potenzen von z' entwickelt, erhält man wieder

$$[I. a.] \quad \Sigma(-1)^a (n-a)^{\dot{m-a}} (z_1 \dots . z)^{\dot{a}} z'^{m-a} = 0 \; ^{*)}.$$

Die Gleichung [II] aber verwandelt sich in

$$[IV] \quad \Sigma z^a f_{n-a}(x', y') = 0.$$

Die hieraus sich ergebenden Wurzelwerthe $z_1 \dots . z_n$ sind dann in die Gleichung [I. a.] zu substituiren. Es ist aber

$$(-1)^a (z_1 \dots . z_n)^{\dot{a}} = \frac{f_a(x', y')}{f_0(x', y')}.$$

Dies also in [IV] substituirt und dann die Gleichung mit $f_0(x', y')$ multiplicirt, ergiebt sich

$$[V] \quad \Sigma(n-a)^{\dot{m-a}} f_a(x', y') z'^{m-a} = 0,$$

als Ortsgleichung für Q. Also:

„Die Gleichung für die einer Richtung zugehörige $m$te Centrale einer Oberfläche $n$ter Ordnung findet man, wenn eine der Richt-Axen der

*) Ueber die Ableitung dieser Formel vergleiche man §. 4.

gegebenen Richtung parallel angenommen wird, aus der Gleichung der gegebenen Oberfläche dadurch, dafs man den Exponenten des mit der gegebenen Richtung parallelen Richtstücks (z) überall um $n-m$ verringert, und jedes Glied mit einer Combinationszahl multiplicirt, deren Elementenzahl dem alten und dessen Classenzahl dem neuen Exponenten dieses Richtstückes gleich ist."

Es ist klar, dafs hierbei jedes Glied, in welchem der aufängliche Exponent von z kleiner ist als $(n-m)$, wegfällt, weil dann bei der Erniedrigung um $(n-m)$ der neue Exponent von z, also auch die ihm gleiche Classenzahl, negativ, die Combinationszahl selbst also 0 wird. Somit ist folglich die Gleichung der einer Richtung zugehörigen $m$ten Centrale einer Oberfläche nur von den Gliedern der $m+1$ höchsten Grade in der Gleichung dieser Oberfläche abhängig; z. B. die der ersten Centrale nur von den Gliedern der beiden höchsten Grade, d. h. des $n$ten und $(n-1)$ten. Daraus folgt, dafs, wenn die Gleichungen zweier Oberflächen in den Gliedern der $m+1$ höchsten Grade übereinstimmen, dafs dann auch die zu den Richt-Axen gehörigen Centralen beider Oberflächen vom ersten bis zum $m$ten Grade identisch sind. Da nun, wenn die Richt-Axen beliebig verändert werden, die neuen Richtstücke immer nur lineäre Functionen der alten sind, und umgekehrt, also durch Substitution der neuen statt der alten in irgend einem Gliede der Grad dieses Gliedes nie erhöht werden kann: so folgt, dafs, wenn die Gleichungen zweier Oberflächen für irgend ein Axenkreuz in den Gliedern der $m+1$ höchsten Grade übereinstimmen, dieselbe Uebereinstimmung auch noch fortbestehen wird bei beliebiger Aenderung der Lage des Axenkreuzes; dafs also dann auch die zu allen Richtungen gehörigen Centralen, von der ersten bis zur $m$ten, in Bezug auf beide Oberflächen identisch sein werden. Wir nennen dann die beiden Oberflächen *concentral* im $(n-1)$ten Grade, und zwar in Bezug auf alle unendlich entfernten Puncte. Was den letzten Zusatz betrifft, so ist klar, dafs zwei Oberflächen auch concentral sein können in Bezug auf eine in endlicher Entfernung liegende Ebene, oder vielmehr auf alle Puncte derselben; wovon man sich leicht überzeugt, wenn man zu den zwei in Bezug auf die unendlich entfernten Puncte concentralen Oberflächen ein collineares System bildet, von der Art, dafs alle unendlich entfernten Puncte ins Endliche rücken; wobei sie bekanntlich eine Ebene bilden. Es werde jedoch, was jenen Zusatz betrifft, nach dem allgemeinen Princip unserer

Benennung festgesetzt, dafs, wenn zwei Oberflächen schlechtweg concentral heifsen, dies sich allemal auf die unendlich entfernten Puncte beziehen soll. Es läfst sich somit der Satz aufstellen:

„*Zwei Oberflächen sind concentral im* m*ten Grade, wenn die Glieder der* m + 1 *höchsten Grade in den Gleichungen beider Oberflächen in Bezug auf irgend ein Axenkreuz übereinstimmen.*"

Es versteht sich von selbst, dafs diese concentrale Beziehung bis zum $(n-1)$ten Grade gehen kann; in welchem Fall sich beide Gleichungen nur durch das constante Glied unterscheiden. Wären sie im $n$ten Grade concentral, so würden beide Oberflächen selbst identisch sein.

Der Begriff von Curven, welche im ersten Grade concentral sind, stimmt überein mit dem von Curven, welche gleiche *Asymptoten* haben. In der That ist das System der n Asymptoten als dasjenige System von n Geraden anzusehen, welches der gegebenen Curve (im ersten Grade) concentral ist; wie sich sogleich daraus ergiebt, dafs die Gleichung für das System der n Asymptoten mit der Gleichung der Curve selbst die Glieder der beiden höchsten Grade identisch hat. Doch ist hier wiederum der Begriff allgemeiner; auch schon in sofern, als er sich auf Oberflächen ausdehnen läfst. Für concentrale Oberflächen haben wir, um eine leichte Anwendung zu geben, die Relation, dafs, wenn irgend eine Gerade hindurchgezogen wird, welche die eine in den Puncten $a_1 \dots a_n$, die andere in $b_1 \dots b_n$ schneidet,

$$Qa_1 + Qa_2 \dots Qa_n = 0 = Qb_1 + Qb_2 + \dots + Qb_n$$

ist, wo Q die Mitte zwischen den n Durchschnittspuncten bezeichnet, welche für beide Oberflächen identisch sein soll. Also da $Qb_1 - Qa_1 = a_1 b_1$ ist, so hat man

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0,$$

oder, in Worten ausgedrückt:

„Zieht man durch zwei concentrale Oberflächen (oder Curven) eine beliebige Gerade, so ist die Summe aller Abschnitte, deren Anfangspuncte auf der einen, und zwar dann stets auf derselben, und deren Endpuncte auf der andern liegen, wenn man diese Abschnitte so wählt, dafs jeder Durchschnittspunct einmal, aber auch *nur* einmal, vorkommt, gleich 0."

Sind die Oberflächen in höheren Graden concentral, so finden, aufser dieser Beziehung, vermöge der Identität der harmonischen Mitten höherer

Ordnungen, noch andere Beziehungen statt, welche sich aber nicht mehr so einfach darstellen lassen.

§. 7. Besondere Beziehungen für den Fall, wo der Pol, oder eine der harmonischen Mitten, in die Oberfläche fällt.

Es falle zuerst der Pol P in die Oberfläche, also in einen der Puncte $S_1 \dots S_n$, z. B. in S_1. Dann ist $PS_1 = 0$. Die Gleichung der harmonischen Mitte $m$ter Ordnung Q ist

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1} \dots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^m = 0.$$

Man multiplicire mit PS_1, so erhält man

$$QS_1 \cdot \left(\frac{QS_2}{PS_2} \dots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{m-1} + PS_1\left(\frac{QS_2}{PS_2} \dots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^m = 0.$$

Ist nun $PS_1 = 0$, so fällt der zweite Theil weg und man behält

$$QS_1 \cdot \left(\frac{QS_2}{PS_2} \dots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{m-1} = 0;$$

also ist entweder $QS_1 = 0$, oder $\left(\frac{QS_2}{PS_2} \dots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{m-1} = 0$, d. h. einer der Puncte Q fällt zugleich in P oder in S_1; die andern $m-1$ Puncte Q sind harmonische Mitten $(m-1)$ter Ordnung zwischen den $n-1$ übrigen Puncten in Bezug auf P *). Man hat also den Satz:

„Nimmt man einen Punct in einer Oberfläche n*ter Ordnung als Pol an, so geht die zugehörige* m*te Centrale durch denselben Punct und hat die Eigenschaft, dafs, wenn man durch jenen Punct eine beliebige Gerade zieht, welche also die gegebene Oberfläche noch in* $n-1$, *die Centrale noch in* $m-1$ *Puncten schneidet, die* $m-1$ *letzteren harmonische Mitten* $(m-1)$*ter Ordnung zwischen den* $n-1$ *ersteren in Bezug auf den Pol* P *sind."*

Und umgekehrt

„Wenn man von einem Punct einer Oberfläche (oder Curve) n*ter Ordnung beliebige Strahlen zieht und auf jeder derselben in Bezug auf jenen Punct die harmonischen Mitten* m*ter Ordnung zwischen den* $n-1$ *übrigen Durchschnittspuncten jenes Strahles nimmt, so liegen diese har-*

*) Hieraus folgt zugleich, dafs, wenn r Puncte $S_1 \dots S_r$ zugleich mit P zusammenfallen, dann auch r Puncte Q in denselben Punct fallen, während die übrigen Puncte Q harmonische Mitten $(m-r)$ter Ordnung zwischen den $n-r$ übrigen Puncten S in Bezug auf denselben Pol P sind.

monischen Mitten auf einer Oberfläche (oder Curve) (m + 1)*ter Ordnung der* (m + 1)*ten Centrale der gegebenen Oberfläche (oder Curve) in Bezug auf jenen Punct.*"

Zieht man, um eine specielle Anwendung zu geben, von einem festen Puncte einer Curve 3ter Ordnung einen beweglichen Strahl und bestimmt auf ihm zu den 3 Durchschnittspuncten desselben den vierten, jenem festen Puncte zugeordneten harmonischen Punct, so liegt dieser jedesmal *auf einem und demselben festen Kegelschnitt.*

Noch ist zu bemerken, dafs, wenn man insbesondere von P eine Gerade zieht, welche die Oberfläche in diesem Puncte berührt, so dafs also zwei Puncte S_1 und S_2 mit P zusammenfallen, dann auch zwei Puncte Q in denselben Punct fallen müssen. Die Gerade berührt also dann zugleich die Centrale, und da dasselbe von allen an P gezogenen Tangenten gilt, so haben alle zu P gehörigen Centralen mit der gegebenen Oberfläche an diesem Punct eine gemeinschaftliche Tangential-Ebene, und diese Tangential-Ebene ist die erste Centrale in Bezug auf ihren Berührungspunct P. Eben so ist die erste Centrale einer Curve in Bezug auf einen Punct derselben die Tangente an diesen Punct.

Es falle zweitens einer der Puncte $Q_1 \dots Q_m$ in einen der Puncte $S_1 \dots S_n$, z. B. in S_1, so mufs, S_1 statt Q substituirt, noch der Gleichung

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1}\right) \dots \left(\frac{QS_n}{PS_n}\right)^m = 0$$

genügen. Man hat also, da $S_1 S_1 = 0$ ist,

$$\left(\frac{S_1 S_2}{PS_2}\right) \dots \left(\frac{S_1 S_n}{PS_n}\right)^m = 0;$$

d. h. der Punct S_1 mufs dann ein Centrum $m$ter Ordnung zwischen den $n-1$ übrigen Puncten sein, in Bezug auf denselben Pol P.

Nun sind die Durchschnitte der $m$ten Centrale mit der gegebenen Oberfläche solche Puncte, und zwar die einzigen, in welchen eine harmonische Mitte $m$ter Ordnung mit einem Puncte S zusammenfällt. Also findet sich zuerst für die Curven, da sich zwei Curven, von denen die eine $m$ter, die andere $n$ter Ordnung ist, in $n.m$ Puncten schneiden, nachstehender Satz:

„*Durch eine Curve* n*ter Ordnung lassen sich von einem Punct in der Ebene derselben* n.m *Gerade ziehen, welche die Beschaffenheit haben, dafs einer ihrer Durchschnittspuncte mit der Curve die harmonische Mitte*

*m*ter Ordnung zwischen den* (n—1) *übrigen in Bezug auf den gegebenen Punct ist; und zwar bilden diese harmonischen Mitten die Durchschnittspuncte der gegebenen Curve mit ihrer auf jenen Punct bezüglichen mten Centrale.*"

Dieser Satz läfst sich wiederum für die erste Centrale und für die erste Polare (die $(n-1)$te Centrale) specialisiren. In Bezug auf jene würde er wie folgt lauten.

„Durch eine Curve *n*ter Ordnung lassen sich von einem Puncte *P* *n* Gerade von der Art ziehen, dafs einer ihrer Durchschnittspuncte mit der Curve die harmonische Mitte (erster Ordnung) zwischen den übrigen in Bezug auf *P* ist, und diese Mitten liegen in einer geraden Linie, der ersten Centrale der Curve in Bezug auf *P*.

„Namentlich lassen sich an eine Curve dritter Ordnung von einem Puncte *P* drei solche Strahlen ziehen, deren drei Durchschnittspuncte mit der Curve in Verbindung mit *P* *vier harmonische Puncte* bilden; und zwar liegen die jenem Puncte *P* zugeordneten harmonischen Puncte in einer geraden Linie, der Centrale u. s. w.

Um den Satz auch für die $(n-1)$te Centrale aussprechen zu können, ist nur zu bemerken, dafs, wenn einer der Durchschnittspuncte harmonische Mitte $(n-1)$ter Ordnung zwischen den $n-1$ übrigen Durchschnittspuncten sein soll, dies nichts anderes heifst, als dafs von diesen $n-1$ Puncten noch einer in jenen ersten Punct fallen, dieser also Berührungspunct einer *Tangente* sein mufs *). Somit ergiebt sich also folgender Satz:

„Aus jedem Punct lassen sich an eine Curve *n*ter Ordnung $n(n-1)$ *Tangenten* ziehen, und zwar bilden die Berührungspuncte derselben die Durchschnittspuncte der gegebenen Curve mit ihrer auf jenen Punct bezüglichen ersten Polare."

Für die Oberflächen würde der allgemeine Satz also lauten:

„*Wenn man aus einem Puncte* P *durch eine Oberfläche n*ter Ordnung die sämmtlichen Geraden zieht, welche in der Art möglich sind, dafs jedesmal einer der Durchschnittspuncte harmonische Mitte m*ter Ordnung zwischen den übrigen in Bezug auf* P *ist, so liegen diese Mitten zugleich in einer Oberfläche m*ter Ordnung, der m*ten Centrale der Ober-*

*) Weil nämlich die harmonischen Mitten *r*ter Ordnung zwischen *r* Puncten mit diesen zusammenfallen.

fläche in Bezug auf P und *bilden also die Durchschnittslinie der Oberfläche mit ihrer mten Centrale.*"

„Insbesondere liegen die Berührungspuncte *der Tangenten,* welche von einem Punct P an eine Oberfläche $n$ter Ordnung gezogen sind, zugleich in einer Oberfläche $(n-1)$ter Ordnung, der ersten Polare der gegebenen Oberfläche in Bezug auf jenen Punct, und bilden also die Durchschnittslinie der Oberfläche mit ihrer ersten zu jenem Puncte gehörigen Polare."

Nimmt man in Bezug auf zwei Puncte P und P' die ersten Polaren einer Oberfläche $n$ter Ordnung, so werden sich diese drei Oberflächen in $n(n-1)^2$ Puncten schneiden, und jeder dieser Puncte, aber auch kein anderer, wird Berührungspunct einer von P und zugleich einer von P' an die Oberfläche gezogenen Tangente, d. h. also auch einer durch die Gerade PP' an die Oberfläche gelegten Tangential-Ebene sein. Somit hat man folgenden Satz:

„Durch eine Gerade lassen sich an eine Oberfläche $n$ter Ordnung $n.(n-1)^2$ *Tangential-Ebenen* legen; und zwar bilden die Berührungspuncte die Durchschnittspuncte der Oberfläche mit ihren auf die Puncte jener Geraden bezüglichen ersten Polaren." *)

Es ließen sich noch manche interessante Beziehungen hier ableiten, deren Aufsuchung ich aber, um nicht zu weitläuftig zu sein, dem Leser überlasse. Vorläufig mögen die gewonnenen Resultate genügen, um die Fruchtbarkeit und Wichtigkeit des oben aufgestellten allgemeinen Satzes anzudeuten, welchen wir nun noch auf zwei reciproke Systeme übertragen wollen.

---

*) Um diesen Satz richtig aufzufassen, erinnere man sich, dafs die auf die Puncte einer Geraden bezüglichen ersten Polaren stets eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve haben. (S. §. 5.)

(Der Schlufs folgt.)

Errata.

Tome XVII.

Page. Ligne.

2 8 connues *lisez* connus

4 4 $(1-x^2)^{-1}$ *l.* $(1-x^2)^{k-1}$

8 16 il ne faut oublier *l.* il ne faut pas oublier

— 7 (en remont.) opère *l.* opérer

11 19 et 22 hyp² *l.* hyp^e.

— 23 tab² *l.* tab^e.

14 4 pour *l.* par

22 2 (en rem.) a forme *l.* la forme

23 1 en, *ôtez la virgule.*

24 15 $\varphi\left(\frac{p'}{n}-1\right).\left(\frac{q''}{n}-1\right)$ *l.* $\varphi\left(\frac{p'}{n}-1\right).\varphi\left(\frac{q''}{n}-1\right)$

25 4 (en rem.) $\left(\frac{dz}{dz}\right)$ *l.* $\left(\frac{dz}{dy}\right)$

— 1 (en rem.) $q=\infty$ *l.* $y=\infty$

— 2 (en rem.) $q=0$ *l.* $y=0$

26 1 $q-xy$ *l.* $y-xy$

— 9 detour *l.* détour

— 12 $F(n)$ *l.* $F(x)$

— 6 (en rem.) $y^{q''-1}$ *l.* $y^{p''-1}$

27 5 $x^{q'+m'}$ *l.* $x^{q'+m-1}$

29 2 $\left(\frac{2p}{2}\right)$ *l.* $\left(\frac{2p}{n}\right)$

[illegible] 64 7 l'années *l.* l'année

[illegible] 66 7 $\frac{p}{n}-2$ *l.* $\frac{p}{n}+2$

[illegible] 70 7 .... *Supprimez ces points*

[illegible] 70 13 t *l.* i

[illegible] 78 11 (en rem.) par la *l.* par là

[illegible] 21 distinctifs *l.* distinctif

[illegible] 3 (en rem.) simples *l.* simple

[illegible] 3 (en rem.) ses *l.* ces

[illegible] 2 autre *l.* autres

— 4 (en rem.) trouve *l.* trouvée

[illegible] 6 (en rem.) $\sqrt{10}-\sqrt{(10-2)}$ *l.* $\sqrt{10}+\sqrt{(10-2)}$

332 15 exemte *l.* exempte

333 8 férait *l.* ferait

334 3 *Lisez* je suppose le nombre entier A^2-B^2 décomposé

— 6 prennant *l.* prenant

336 17 connue *l.* comme

— 19 analytiquement pas *l.* analytiquement partant

337 20 rason *l.* raison

— 3 (en rem.) existance *l.* existence

338 10 (en rem.) pésantant *l.* présentant

— 3 (en rem.) ils *l.* il

339 8 $p+2r+n-7$ *l.* $p+2r+n-1$

341 17 $(p-1)$ *l.* $2(p-1)$

344 1 $A_{(2)}$ *l.* $A_{(3)}$

345 4 *Dans le titre il faut lire* voûte symétrique, à base etc. *aulieu de* voute symmétrique, à la base etc.

349 4 au moins *l.* ou moins

350 9 $\frac{m^2}{2}(\delta^2-\varepsilon^2)\cos^2\varphi$ *l.* $\frac{m^2}{2}(\delta^2-\varepsilon^2)\cos 2\varphi$

— 4 (en rem.) $\int\frac{dm}{m^2\sqrt{Q}}$ *l.* $\int\frac{dm}{m^3\sqrt{Q}}$

351 8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^2\theta = \frac{1}{2}$ *l.* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^3\theta = \frac{2}{3}$

353 18 $\left(\frac{\delta-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}\right)^2$ *l.* $\left(\frac{\delta-\varepsilon}{\delta+\varepsilon}\right)^2$

— 22 $\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)^m$ *l.* $\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)^{2m}$

355 7 $\sqrt{(a^2-\delta^2u^2}$ *l.* $\sqrt{(a^2-\delta^2u^2)}$

— 7 (en rem.) $\cot\varphi$ *l.* $\cos\varphi$

358 11 P' *l.* P''

Tome XX.

Page. Ligne.

[illegible] 16 courbes *l.* couches

— 22 concué *l.* concue

— 24 supçonnées *l.* soupçonnées

[illegible] 8 *Lagranye* *l.* *Lagrange*

191 14 x *l.* k

— 25 posant *l.* pesant

192 11 connue *l.* comme

— 13 et 14 courbes *l.* couches

Page. Ligne.
193 8 grand *l.* grands
— 11 considération *l.* considérations
— 13 besoins *l.* besoin
— 14 ameliorées *l.* améliorées
195 4 décrites *l.* décrits
— 11 a_2^2 *l.* a_1^2
— 2 (en rem.) $\varpi' - \varpi'$ *l.* $\varpi' - \varpi$
197 3 (8) *l.* (8):
199 6 $\left(\frac{1+nv'}{1+v}\right)$ *l.* $\left(\frac{1+nv'}{1+v'}\right)$
— 13 menie *l.* menée
202 9 (en rem.) *après* (10.) *il faut ajouter ces mots:* „En faisant $v = \frac{\varpi}{k}$
„dans les équations (7.) et (8.) on
„obtient
[15] etc.
203 7 (en rem.) nc^2 *l.* n^2c^2
204 5 valeurs *l.* valeurs
— 13 m^2h^2 *l.* m^2b^2
207 18 cône *l.* carré
— 1 (en rem.) $y = x'\sin\varphi + x'\cos\varphi$ *l.*
$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$
208 6 et 7 A^2+B^2+4C *l.* $A^2+B^2+4C^2$
209 4, 6 et 7 π *l.* Π
210 17, 22, 24, 27, 28, 31 π *l.* Π
211 2 π *l.* Π
— 9 (en rem.) c''^2 *l.* e''^2
213 3 A *l.* A'
— 5 $\frac{a^2v}{1+v}$ *l.* $\frac{a^2v}{(1+v)^2}$
— 9 reduisant *l.* réduisant
— 12 $B'+t$ *l.* $B'=t$
— 21 so *l.* se
216 16 M^2N^2 *l.* M^2-N^2
— 16 B^2-C^2 *l.* $B'-C'$
— 17 *Le signe — doit précéder* Δ^2
— 22 $x' = (\Delta - 2')\tang\beta$ *l.*
$y' = (\Delta - 2')\tang\beta$
— 2 (en rem.) resoudre *l.* résoudre
219 1 (en rem.) $(+v)$ *l.* $(1+v)$
221 7 (en rem.) traitée *l.* traitées
222 8 (en rem.) position *l.* portion
224 10 $\frac{1}{L}$ *l.* $\frac{1}{l}$
225 5 (en rem.) ist *l.* il
226 2 abstruction *l.* abstraction
227 3 (en rem.) par exemple *l.* un exemple
231 14 (en rem.) ici *l.* a'
232 1 $\int_0^2$ *l.* $\int_0^{2\pi}$

Page. Ligne.
233 5 B *l.* B'
— 1 (en rem.) mnv^2 *l.* $3mnv^2$
236 2 on *l.* ou
237 15 (L''') *l.* (L'')
239 3 et 13 A_1 *l.* A'
240 14 procéde *l.* procédé
242 4 M *l.* M'
246 3 R^2h *l.* R^2-h
— 6 (en rem.) *supprimez* $2\pi+\epsilon$
247 6 $\tang^3\epsilon$ *l.* $\tang^2\epsilon$
250 6 (en rem.) *après* $-\frac{D^2}{U^2}$ *mettez* $=0$
251 4 un trinome *l.* au trinome
— 9 (en rem.) $E = -AV'$ *l.* $E = -A'V'^2$
252 7 V^2 *l.* V'^2
— 8 *après* R^2 *un point.*
— 9 l' *l.* L'
— 16 T_2^2 *l.* T^4
— 16 $=a$ *l.* $=0$
255 1 (en rem.) *devant* X *mettez* 101.
— 5 (en rem.) $B_2 = T^2 + V''T^2\left(a+\frac{D}{U}\right)$
l. $B_2 = T^2 + V'T^2\left(a-\frac{D}{U}\right)$
— 6 (en rem.) $\sqrt{\varphi}$ *l.* $d\varphi$
258 4 (en rem.) z^2 *l.* Z^2
260 12 (en rem.) K *l.* k^2
261 11 *après* $\frac{MN}{L}$ *mettez*]
262 11 T *l.* T^2
263 5 $\Pi''=a$ *l.* $\Pi''=0$
264 3 $-2T\frac{D}{U}$ *l.* $-2T^2\frac{D}{U}$
— 5 (en rem.) LU *l.* LU^2
266 13 $-k^2N+l^2M$ *l.* $-(k^2N+l^2M)$
— 16 *Done* *l.* Donc
269 8 (en rem.) exécuts *l.* exécuter
— 11 (en rem.) $-(b_1^2-a_1^2)$ *l.* $+(b_1^2-a_1^2)$
272 13 du' *l.* du
— 14 $+\pi k$ *l.* $-\pi k$
— 16 4 *l.* 4'
274 5 *supprimez le mot* pas
— 12 $-2d(v)^{-1}$ *l.* $-2d(U)^{-1}$
277 4 (en rem.) sin . sin ϖ *l.* sin θ . sin ϖ
— 13 (en rem.) en égard *l.* eu égard
278 6 (en rem.) $B_{(m)}$ *l.* $B_{(2n)}$
279 5 $R_{(2n)}$ *l.* $B_{(2n)}$
— 20 $Hy^{2m}x^{2n}$ *l.* $Hy^{2m}z^{2n}$
— 21 affecté *l.* affectés
280 1 (en rem.) 2^{k+1} *l.* 2^{k+J}
281 14 $N'=$ *l.* $N''=$

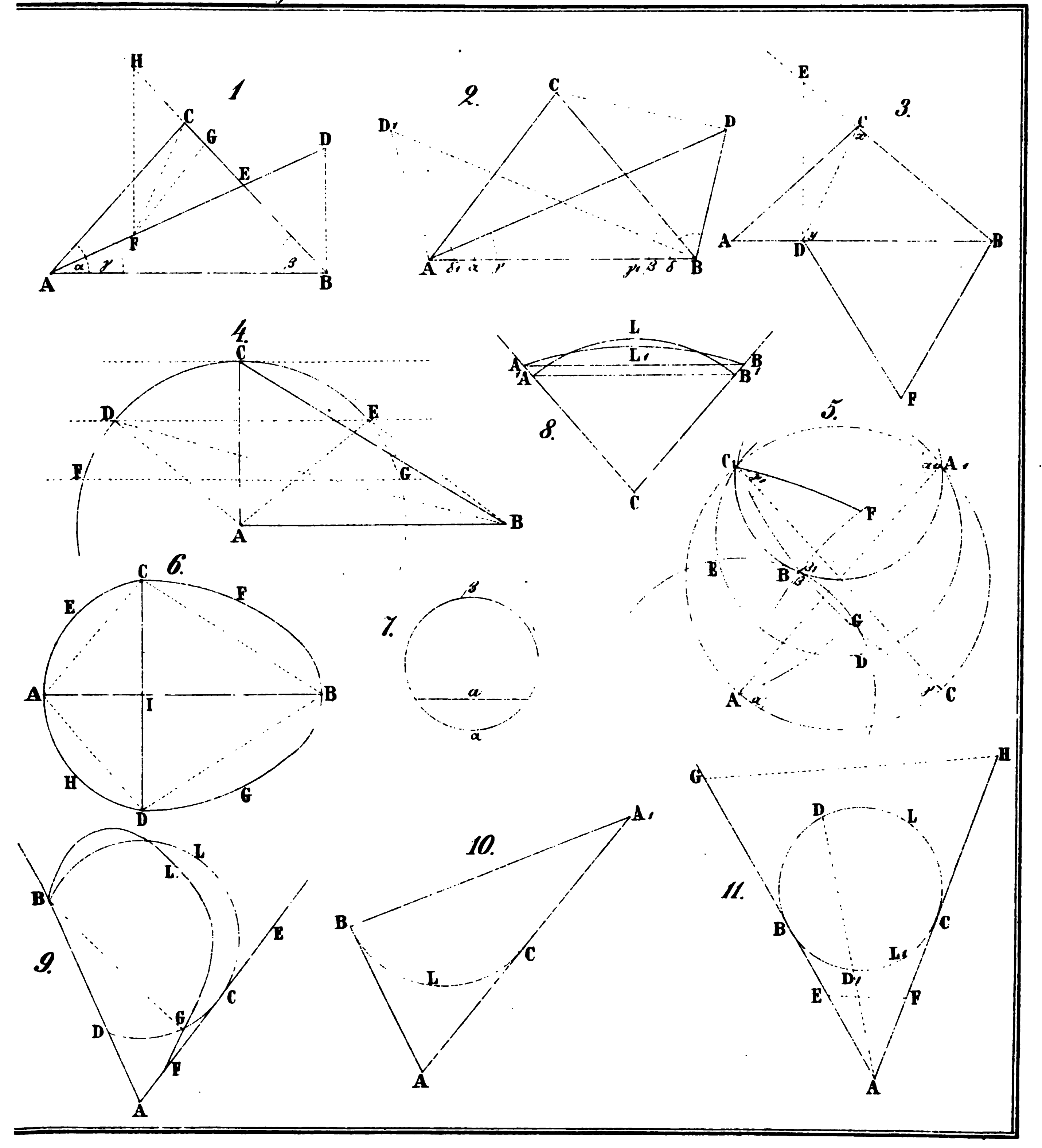
Fac-simile einer Handschrift von Huyghens.

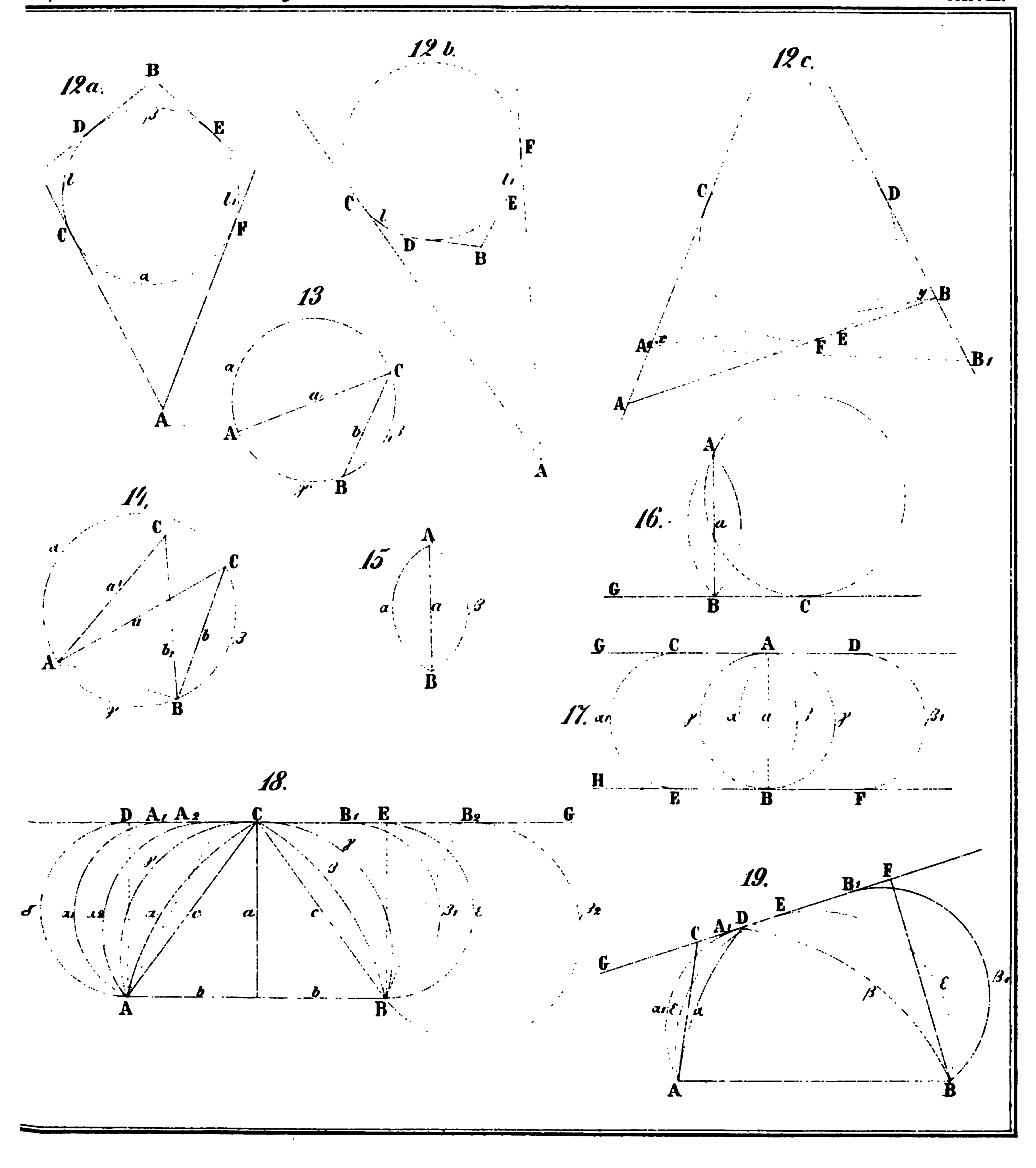
Spectatissimo Clarissimoque Viro

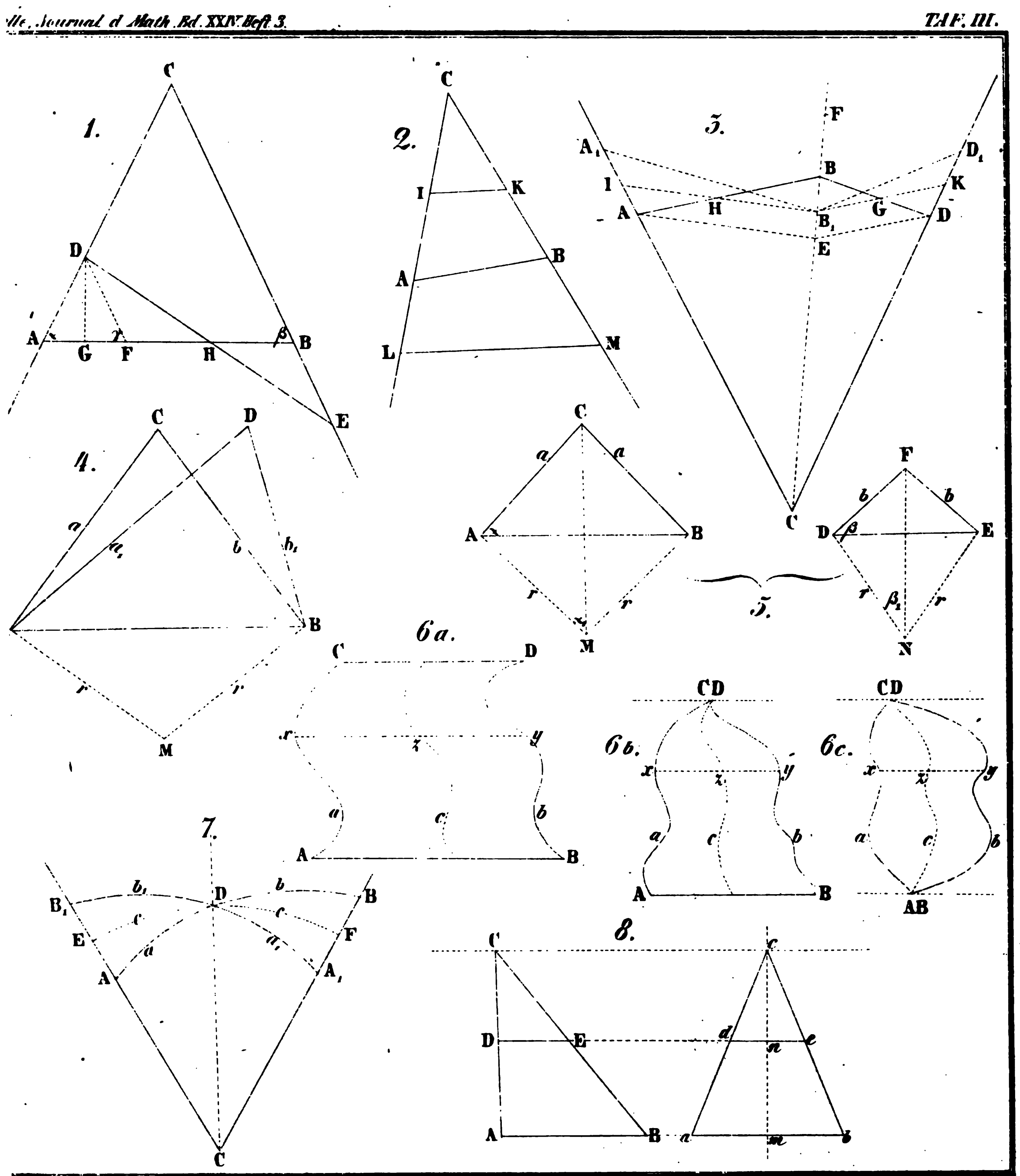
D. Joh. Hevelio Chr. Hugenius S.

Novi Horologii nostri Descriptionem mitto tibi Clarissime, cujus inventio quam grata tibi futura sit dubitare nequeo, qui etiam exploratam tibi pridem pendulorum in re Astronomica utilitatem, in qua quod hactenus desideratum fuit nunc suppleri vides. Nescio quis nuper etiam mihi retulit, pendulis omnia hujus motus naturam et symptomata te examinanda sumpsisse atque etiamnum in eo esse: Quam te rogatum volo, ut si quid in eis novi, aut diversum ab iis quae a nobis tradita sunt, observaveris, ne graveris de eo me certiorem facere. Saturnij systematis promissam tibi editionem quo minus adhuc absolvere potuerim varijs rebus impeditus fui, et in primis hoc ipso Horologiorum invento, negotijsque ingratissimis, quae nefarij homines quidam occasione mihi concitarunt. etc:

Hagae. 16 Sept. S.N.
1658.


1
H C G D E F A B
2
C D' D A B
3
E C A D B F
4
C D E F G A B
8
L L' A B C
5
C A' F B G D A C
6
C E F A I B H D G
7
a
9
B L L E C G D F A
10
A' B C L A
11
G H D L B C L' D' E F A


12a.
12 b.
12 c.
13
14.
15
16.
17.
18.
19.

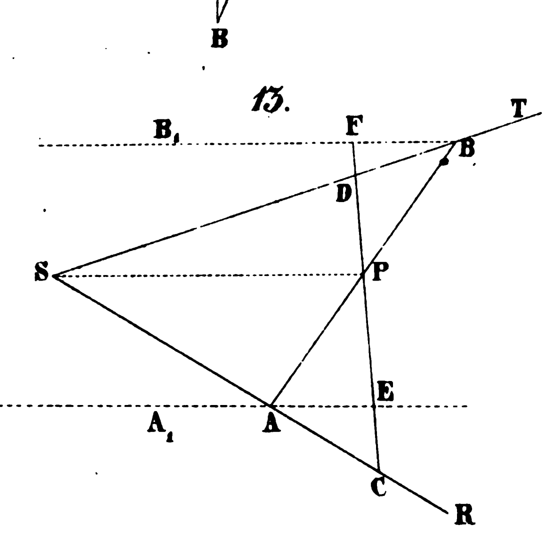

1.
C
D
A
G
F
H
B
E
2.
C
I
K
A
B
L
M
3.
F
A,
D,
B
I
K
A
H
B,
G
D
E
C
4.
C
D
a
a,
b
b,
B
r
r
M
5.
C
a
a
A
B
r
r
M
F
b
b
D
E
r
r
N
6a.
C
D
x
z
y
a
c
b
A
B
6b.
CD
x
z
y
a
c
b
A
B
6c.
CD
x
z
y
a
c
b
AB
7.
D
B,
b,
b
B
E
c
c
F
a
a,
A
A,
C
8.
C
c
D
E
d
n
e
A
B
a
m
b

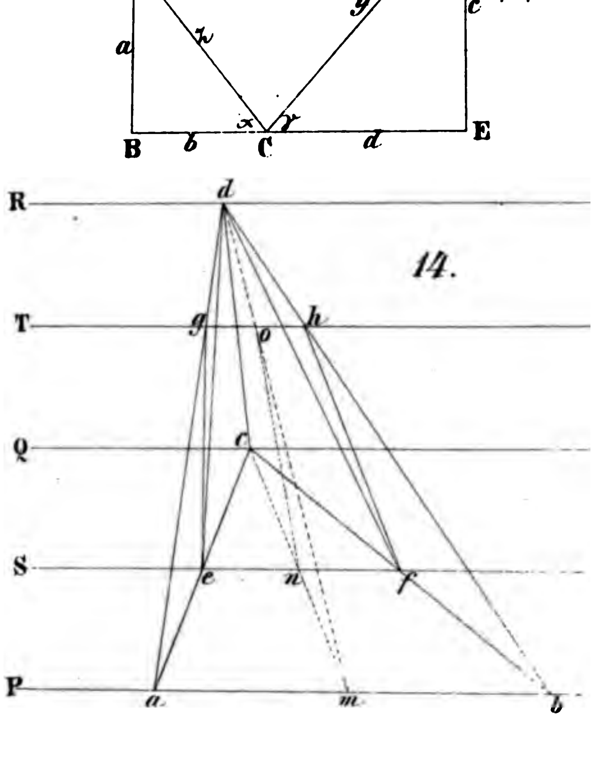
9.

10.

11.

12.







	DATE DUE		
SEP	1 7 1976		

